

Н. ИЗВОЛЬСКИЙ

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

(ПЛАНИМЕТРИЯ)

Допущено Государственным Ученым Советом

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД — 1924

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

Н. ИЗВОЛЬСКИЙ

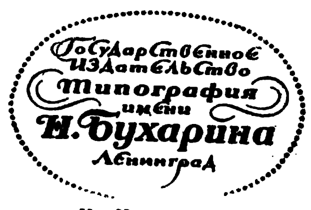
ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

(ПЛАНИМЕТРИЯ)

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

Допущено Государственным Ученым Советом

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД
1924



Ул. Моисеенко, 10.

Гиз. № 10328. 10.000 экз. Ленинградский Гублит № 13036.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Считаю необходимым изложить тот руководящий взгляд на самый предмет геометрии, которым направляется изложение моего курса, даваемого как в настоящей книге *„Геометрия на плоскости“*, так и в книге *„Геометрия в пространстве“*. Я должен указать на ту книгу, которая много помогла мне, чтобы придать этому взгляду определенную форму. Эта книга принадлежит перу покойного французского математика-философа Анри Пуанкаре и переведена на русский язык: *Г. Пуанкаре.* Наука и метод. Издание Mathesis (Одесса).

Всякая наука отбирает в свое ведение определенный ряд фактов, составляющий тот материал, над которым работает эта наука. Материалом, подлежащим ведению геометрии, является совокупность всех точек, линий и поверхностей; наше сознание признает возможным под влиянием наблюдения и опыта (наблюдение и опыт являются всегда первоисточником знания[1]) признать существование точек, линий и поверхностей, хотя они отдельного материального существования и не имеют. Подобно тому, как человеческий гений пришел к необходимости создания чисел (в природе никаких чисел не существует; человечество само, под влиянием наблюдения и опыта, создало понятия о числах, чтобы лучше ориентироваться во всем окружающем), так точно явилась необходимость создать понятия и о точках, линиях и поверхностях. Можно не только мыслить эти понятия, но можно — наблюдения и опыты, под влиянием которых эти понятия были созданы, дают для этого средства — придать этим понятиям известные образы: мы можем воображать точки, линии и поверхности.

[1]) Но это вовсе не значит, что всякое знание состоит исключительно из того, что наблюдение и опыт дают нашим органам чувств.

Каждая наука прежде всего производит классификацию того материала, над которым она работает, стараясь прежде всего выделить то, что признается ею, по каким-либо основаниям, простейшим. Геометрия поступает так же. Пользуясь известными наблюдениями и опытами, а также теми образами, какие присвоены точкам, линиям, поверхностям, геометрия признает: 1) все точки одинаковы; 2) среди линий имеется одна, которая признается нами простейшею — прямая линия; 3) из поверхностей выделяется простейшая, а именно — плоскость.

Во „Введении" (стран. 1 — 7) даны те наблюдения и опыты, которые могли бы привести к созданию понятий о точках, линиях и поверхностях, а также к выделению простейших линий и поверхности.

Далее, каждая наука изучает ряд комбинаций из того материала, который подлежит ведению этой науки. Эти комбинации или берутся готовыми, в том виде, как они существуют в природе, или осуществляются самою наукою. Геометрия преимущественно (а может быть и *исключительно*) сама строит те комбинации, которые желает изучить. Построение этих комбинаций идет сначала как бы ощупью, начиная с простейших — прямая и точка (прямая и 2 точки и т. д.), причем всякий раз, построив какую-либо комбинацию, геометрия рассматривает, изучает ее с целью выяснить, не получилось ли чего-либо особенного, чего-либо достойного внимания, чего-либо интересного; геометрия изучает также те вопросы, какие возникают при построении этих комбинаций.

Так, комбинируя прямую линию и точку, мы видим, что наступает некоторая особенность (прямая делится на 2 части) лишь тогда, когда точка берется на самой прямой; эта особенность ведет лишь к тому, что каждой части прямой приходится дать какое-либо название (напр., *луч*). Продолжая развитие комбинаций, мы рассматриваем прямую и на ней две точки: получаем два луча и еще часть прямой, которую называем *отрезком*. Возникает вопрос: если точки как-либо передвигать по прямой (в одном ли направлении, или навстречу друг другу — безразлично), не появится ли тогда какой-либо особенности? На этот вопрос, после его рассмотрения, отвечаем отрицательно. Здесь возникает руководящая мысль для дальнейшего построения комбинаций: мы рас-

смотрели прямую и на ней две точки, рассмотрим теперь точку и через нее две прямых. Получаемая новая комбинация прежде всего представляет некоторую симметрию; поэтому является возможным рассмотреть более простую комбинацию: точку и из нее два луча. Мы называем эту комбинацию именем *угол*, и, подобно тому, как решали подобный вопрос при получении отрезка, рассматриваем: не получится ли чего-либо особенного, если лучи как-либо (в одном или противоположных направлениях — безразлично) вращать. Здесь мы приходим к заключению, что имеет место один особенный случай: два луча (стороны угла) составят в известный момент прямую линию. Таким образом мы приходим к понятию об особом угле (выпрямленный угол). Появляются также новые руководящие мысли, благодаря нашему стремлению к объектам какой-либо совокупности применять понятия: „равно", „больше" „меньше", „сумма и разность двух объектов". Чем дальше идет работа построения и изучения комбинаций, тем разнообразнее становятся руководящие мысли для построения новых комбинаций, тем больше появляется целей, достигнуть которых мы стремимся, строя все новые и новые комбинации. Все, что замечается интересного, запечатлевается нами в словесной форме в виде теорем.

Мои книги представляют собою лишь попытку построить курс геометрии в согласии с вышеизложенным взглядом; полное, до конца выдержанное развитие курса геометрии в согласии с этим взглядом крайне затрудняется тем обстоятельством, что мы все уже очень привыкли к традиционному курсу геометрии, представляющему собрание теорем, причем главное внимание обращается на их доказательство, а не на причину их возникновения.

Следствиями изложенного взгляда на предмет геометрии являются следующие положения:

1) Прежде всего надо уметь построить какую-либо комбинацию (фигуру), а потом уже следует изучать как саму полученную фигуру, так и вопросы, связанные с ее построением.

2) Понятия „угол", „треугольник", „параллелепипед" и т. п. получают вполне определенное толкование: каждое из них выражает собою определенную комбинацию точек, прямых линий и плоскостей.

Далее отсюда вытекает также объяснение того, что в моем курсе понятия о прямом угле, о перпендикуляре вводятся лишь

тогда, когда постепенное развитие комбинаций привело к такой (ромб), что само собою оказались построенными и прямой угол и две взаимно перпендикулярные прямые.

Второе издание *Геометрии на плоскости* отчасти сохранило те особенности, какие имели место в первом издании (курс разделяется на „чистую геометрию" и „измерительную геометрию"; учение о пропорциональности прямолинейных отрезков опирается на общий признак равенства двух отношений: два отношения равны, если не существует числа, которое было бы больше одного из отношений и меньше другого; в курсе имеются статьи о подобном расположении — гомотетии — фигур, о радикальной оси и о радикальном центре кругов, дано более широкое, чем это обычно делается, развитие ряда задач на построение кругов, проходящих через данные точки или касающихся данных прямых или кругов), отчасти несколько изменено.

Вот наиболее крупные изменения:

1) Признаки равенства треугольников выясняются, как следствия ряда упражнений на построение треугольников (nn°36—49).

2) Изменен порядок начала измерительной геометрии: сначала (nn°161 — 179) дано учение об отношениях прямолинейных отрезков (оно получило также, сравнительно с 1-м изданием, большее развитие), а затем уже рассматривается вопрос об измерении прямолинейных отрезков, дуг одного круга, углов и площадей.

3) Учение об измерении длины и площади круга опирается, как и в 1-м издании, на возможность рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон. Однако, теперь даны еще добавления, причем изложение первого издания несколько изменено, позволяющие вникнуть поглубже в сущность тех затруднений, какие имеют место при решении этих вопросов (nn°274, 275, 281).

В III издании переработано начало курса (треугольники и параллельные прямые) и изложена иначе статья о средних линиях.

Н. Извольский.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Опыт постоянно сталкивает нас с делением чего-либо на части: разрезая ножом яблоко, мы делим его на части; раскрасив различными красками (например, черной и красной — см. прилагаемый рисунок) взятый кусок белой бумаги, мы этим самым разделим поверхность этого куска бумаги на части: на белую, на черную, на красную; поверхность Европы, мы знаем, разделена на государства; налив в стакан воды, чтобы он не был наполнен, мы этим самым разделим пространство, заключенное внутри стакана, на части: одна наполнена водою, другая — пустая (наполнена воздухом); насыпав в ящик в одну сторону песку, а в другую глины так, чтобы песок и глина не смешались (для чего их удобно намочить), мы разделим пространство, заключенное внутри этого ящика, на части: одна занята песком, другая глиною и третья, если ящик не наполнен, занята воздухом.



Мы признаем, что во всех случаях, подобных перечисленным, существует между двумя соседними частями граница: мы постоянно говорим, рассматривая карту Европы, о границе между Россией и Китаем, между Германией и Францией и т. д.; на прилагаемом раскрашенном рисунке мы видим границу между красною и белою, между черною и белою, между красною и черною частями бумаги; мы также видим границу

между частями пространства, заключенного в стакане, одна из которых занята водою, а другая без воды; заметим также границу между частями пространства, заключенного внутри ящика, из которых одна занята песком, другая глиною, третья воздухом.

Для **геометрии** является существенным вопрос о процессе деления на части и о границах между двумя соседними частями, получаемыми от этого деления. Рассмотрим подробнее процесс деления на части.

Все, что мы видим — мебель в этой комнате, соседние дома, деревья, облака, солнце, луна, звезды, наконец, мы сами — все помещается в **пространстве**. Определить, что такое пространство, нельзя, но мы из опыта выработали его основные свойства, мы можем представлять в своем воображении эти свойства, можем о них размышлять. Прежде всего нам ясны два свойства пространства: 1) пространство безгранично, и 2) можно вообразить его разделенным на части (опыт постоянно нам говорит о последнем свойстве: всякий предмет, например, наше тело, выделяет из беспредельного пространства некоторую часть, т.-е. делит его на части: на часть, занимаемую этим телом, и на все остальное) способность пространства быть разделенным на части выражают иногда словами: пространство имеет протяжение.

Граница между двумя соседними частями пространства называется **поверхностью** (например, поверхность земли отделяет часть пространства, занимаемую земным шаром от всего остального пространства). Поверхность, в свою очередь, имеет протяжение, т.-е. ее можно вообразить разделенною на части (например, поверхность земли разделяется на водную и материковые части; лист бумаги выделяет из пространства часть, занятую веществом бумаги; граница, выделяющая эту часть пространства от остального, есть поверхность этого листа бумаги; она делится на несколько частей: 2 части предназначаются для письма на них, и 4 части, ускользающие благодаря своей незначительности от нашего внимания, — те, по которым обрезан этот лист). Граница между двумя соседними частями поверхности называется **линиею** (рассмотреть границы между областями различных цветов на данном выше раскрашенном рисунке). Линия, в свою очередь, имеет протяжение, т.-е. ее можно вообразить разделенною на части (например, граница, отделяющая на выше данном раскрашенном

рисунке белую часть бумаги от цветной, разделяется на 2 части: одна отделяет белую от красной, другая — белую от черной; граница, отделяющая Германию от остальной Европы, разделяется на части: одна отделяет Германию от Франции, другая — от Австро-Венгрии и т. д.). Граница между двумя соседними частями линии называется точкою. Точку мы уже не можем вообразить разделенной на части, — точка не имеет протяжения.

Из выше данного исследования вопроса о делении на части следует, что мы признаем существование поверхностей, линий и точек, которые все помещаются в пространстве. Раз мы признаем их существование, мы должны выработать способность представлять их, хотя они и невещественны, и рассуждать о них. Цель геометрии состоит в изучении особенностей поверхностей, линий и точек, как отдельно взятых, так и взятых в сочетании друг с другом.

Всякая совокупность поверхностей, линий и точек называется геометрическою фигурою (иногда геометрическим образом или геометрическою формою). Каждая поверхность, каждая линия, каждая точка, входящая в состав фигуры, называется ее частью. Так как всякая фигура помещается в пространстве, то, изучая фигуры, мы тем самым изучаем свойства пространства, причем это изучение состоит в том, что 1) мы устанавливаем, какие фигуры можно осуществить в пространстве, и 2) изучаем особенности этих фигур. Поэтому говорят иногда, что

Геометрия есть наука о пространстве.

2. Мы должны развить способность воображать как бы существующими невещественные геометрические фигуры. Эта способность называется геометрическим представлением. Некоторые свойства фигур мы открываем путем геометрического представления, и иным путем выяснить их невозможно. Такие свойства называются **аксиомами**. Вот аксиома, общая для всевозможных фигур:

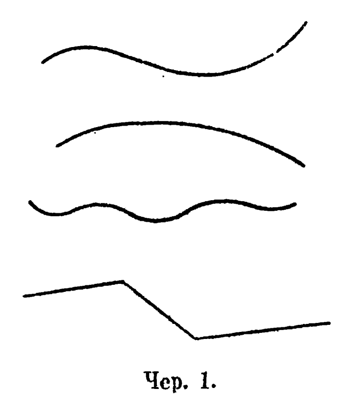
Всякую фигуру можно переносить из одного места пространства в другое, — от этого фигура не претерпевает никаких изменений.

В основе этой аксиомы положена мысль, что **пространство однородно**.

Таким образом мы можем фигуру переносить в пространстве; если перенесением одной фигуры можно добиться, чтобы она совпала с другою, то такие две фигуры называются **равными** или **конгруэнтными**. Итак, **равными фигурами называются такие, которые при наложении совпадают всеми частями**.

3. При дальнейшем изучении фигур получают ряд свойств, пользуясь, с одной стороны, непосредственным геометрическим представлением, а с другой — рассуждениями, построенными по правилам логики. Такие свойства называются **теоремами**. Рассуждения, при помощи которых выясняется справедливость теоремы, называются ее **доказательством**.

Одним из глубоких вопросов является вопрос об отделении того, что узнано нами только непосредственным представлением, и того, чего достигли путем логики. Этот вопрос, несмотря на много работ в этом направлении, нельзя до сих пор считать решенным. В курсе элементарной геометрии и непосредственное геометрическое представление и логика должны взаимно помогать друг другу, чтобы найденное свойство, по возможности, обрисовалось для нас со всех сторон.



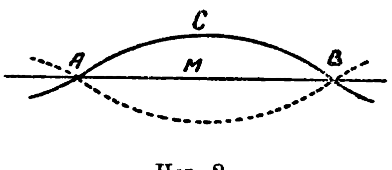
Чер. 1.

Иногда случается, что раз найдена какая-либо теорема, то тотчас же становятся ясными и другие свойства фигуры. Эти свойства называют **следствиями** из теоремы.

4. Все точки сходны между собою, и одна от другой могут отличаться только своим положением в пространстве. Наоборот, линии, кроме положения, занимаемого ими в пространстве, могут отличаться друг от друга формою. На чер. 1 нарисованы линии разных форм. Является вопрос: какую форму линии надо признать простейшею?

Для сравнительного разбора форм линий вообразим 2 точки A и B (точки называют, обыкновенно, большими буквами латин-

ского алфавита) и какую-либо линию, произвольной формы, проходящую через эти точки, линию ACB (чер. 2). Следует заметить, что точки и линии, нарисованные на чертеже, не настоящие точки и линии, а только их грубые изображения, которыми мы пользуемся, чтобы облегчить свое воображение. Эту линию ACB можно вообразить вращающеюся около точек A и B; от этого она не изменяет своей формы (на основании аксиомы n°2). При вращении она, вообще говоря, занимает последовательно бесчисленное множество различных положений, всякий раз, однако, проходя чрез точки A и B. Одно из таких положений нарисовано на чер. 2 пунктиром. Следовательно, линий взятой формы удалось провести через 2 взятые точки бесчисленное множество.



Чер. 2.

Если случится, что взятая линия вращается так, что остается на месте, не меняет своего положения (наше воображение позволяет нам утверждать, что такой случай возможен, какие бы 2 точки мы ни взяли), то окажется, что линий этой особенной формы возможно чрез 2 точки провести только одну. На черт. 2 такая форма изображена линиею AMB.

Естественно признать эту особенную форму линии простейшею, — называют такую линию **прямою**. Итак, мы признаем:

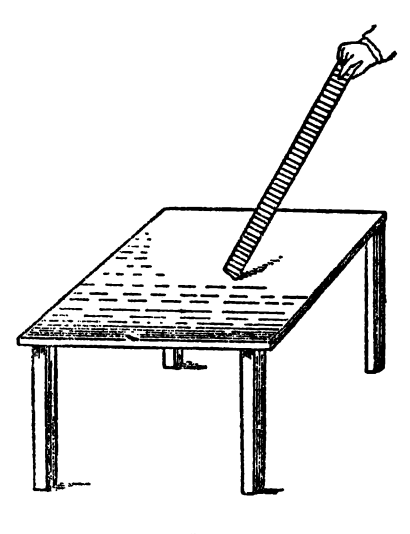
1) **существуют прямые линии;**

2) **чрез всякие 2 точки можно провести прямую линию и только одну.**

Кроме того, мы еще признаем, что **прямая линия не имеет концов (бесконечна).**

5. Более трудным является вопрос об изыскании самой простой поверхности. Сначала разберем чисто-практическую сторону дела. Если хотим узнать, как много неровностей и как они велики на поверхности стола, мы берем линейку, получше выверенную (ребро ее должно возможно приближаться к прямой линии), укладываем ее ребром в разных направлениях на поверхность стола и всякий раз смотрим на свет, много ли остается промежутков между столом и ребром линейки. Чем их меньше, тем ровнее испытуемая поверхность. Что значит прикладывать к поверхности

стола ребро линейки? Если сделать так, чтобы ребро имело с поверхностью стола лишь одну общую точку (чер. 3), то ребро еще не будет приложено к столу. Надо вращением добиться того, чтобы какая-либо другая точка ребра пришла в совпадение с какою-либо точкою поверхности; тогда у ребра линейки и у поверхности стола окажется непременно 2 общих точки, и мы скажем, что ребро линейки приложено к столу. Возможно, что других общих точек у них вовсе не будет; возможно, что их будет бесчисленное множество.



Чер. 3.

Перейдем теперь к невещественным геометрическим формам. Пусть имеем какую-нибудь поверхность и так же, как на практике, вообразим прямую линию, которая приложена к нашей поверхности, т.-е. имеет с нею 2 общих точки. Здесь мы можем вообразить случай, на практике невозможный: между поверхностью и приложенною прямою вовсе нет промежутков, т.-е. прямая совпадает с нашею поверхностью не только двумя, но и всеми ее точками. Теперь можно сказать, что по направлению нашей прямой поверхность вовсе не имеет неровностей. Можно вообразить поверхность, которая по всем направлениям не имеет неровностей, и такая поверхность признается нами простейшею, — она называется плоскою поверхностью или плоскостью. Итак, мы признаем:

1) существуют плоскости;

2) всякая прямая, имеющая с плоскостью две общих точки, совпадает с нею всеми своими точками.

6. Геометрические фигуры разделяются на плоские и пространственные: плоскою фигурою называется фигура, всеми своими частями умещающаяся на одной плоскости, а простран-

ственною называется фигура, не умещающаяся всеми частями на плоскости. Геометрия разделяется на 2 части: первая часть изучает плоские фигуры,—и она называется **плоскою геометриею** или **планиметриею**; вторая часть изучает пространственные фигуры,—и она называется **пространственною геометриею или стереометриею.**

Геометрию подразделяют еще 1) на чистую геометрию, где изучаются особенности расположения частей фигуры, и 2) на измерительную, где геометрические фигуры рассматриваются с точки зрения измерения. В чистой геометрии число появляется лишь как результат счета и не имеет первенствующего характера; в измерительной же геометрии число является основою (измерить значит выразить числом), и здесь геометрия сближается с арифметикою и алгеброю.

ПЛОСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(ПЛАНИМЕТРИЯ)

ЧАСТЬ I.

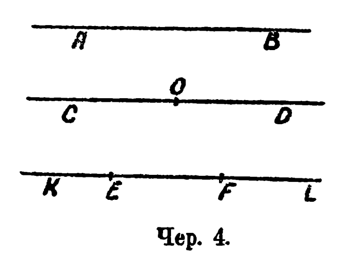
Чистая геометрия.

ГЛАВА I.

Отрезки и углы.

7. На плоскости помещается множество точек и прямых. Принимают, что можно на плоскости строить точки и прямые; на практике для построения прямой употребляется линейка.

Прямая тянется без конца в обе стороны. На чер. 4 построена прямая AB; воображением должно продолжить ее без конца в обе стороны. Если построить какую-либо точку, напр., точку O, на прямой CD (чер. 4), то прямая разделится на 2 части: одна часть тянется от точки O вправо без конца, а другая — от точки O влево без конца. Каждая из этих частей называется лучом. Здесь имеем 2 луча: луч OD и луч OC.



Чер. 4.

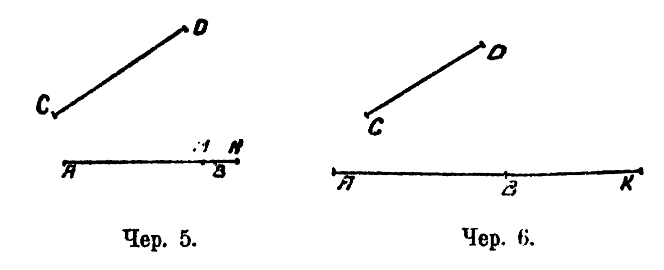
Мы можем через каждую данную точку построить бесчисленное множество лучей.

Если возьмем на прямой 2 точки, напр., на прямой KL (чер. 4) точки E и F, то часть прямой линии между этими

точками называется **отрезком**. На чертеже имеем отрезок EF.

8. **Сравнить 2 даных отрезка** AB и CD (чер. 5).

Переносим отрезок CD так, чтобы точка C попала в A, и вращаем его около точки A до тех пор, пока отрезок CD не пойдет по отрезку AB. Когда этого достигнем, заметим, куда попадет точка D: если она попадет в B, то наши отрезки **равны**; если D попадет куда-либо между точками A и B (напр.,



Чер. 5. Чер. 6.

в M), то отрезок CD считается **меньше** отрезка AB, и если точка D попадет за точку B (напр., в N), то отрезок CD **больше** отрезка AB.

„Сравнить" два отрезка понимаем в смысле установить, равны ли они, или один больше другого.

9. **Найти сумму двух данных отрезков.**

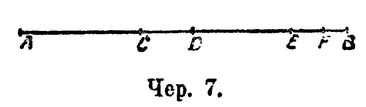
Взяты два отрезка AB и CD (чер. 6); надо сложить эти отрезки.

Для этого переносим отрезок CD так, чтобы точка C попала в B, и затем вращаем его около B до тех пор, пока он не пойдет по продолжению отрезка AB. Отметим, куда попадет точка D; если она попадет в K, то отрезок $BK = CD$ и $AK = AB + BK$ или $AK = AB + CD$.

Всякий отрезок можно разбить промежуточными точками на сумму нескольких слагаемых; напр.:

$$AB = AC + CD + DE + EF + FB \text{ (чер. 7).}$$

Для нас ясно, что **сумма отрезков не изменяется от перестановки слагаемых.**

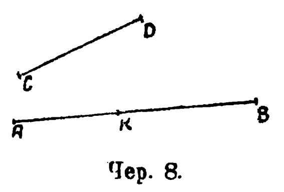


Чер. 7.

10. Найти разность двух отрезков.

Даны два отрезка AB и CD (чер. 8); надо из большого отрезка AB вычесть меньший CD.

Переносим отрезок CD так, чтобы точка D попала в точку B, и станем вращать его около B до тех пор, пока он не пойдет по направлению BA; отметим, когда этого достигнем, куда попадет точка C. Если C попадет в K, то $KB = CD$ и $AK = AB - KB$ или $AK = AB - CD$.



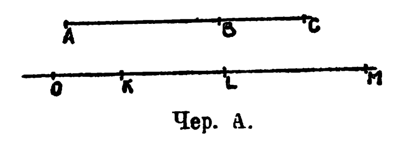
Чер. 8.

Можно данный отрезок умножить на 2, на 3, на 4 и т. д., т.-е. повторить его слагаемым 2, 3 и т. д. раз.

Из nn° 8—10 нам важно усвоить, что 1) к отрезкам, как и к числам, приложимы понятия: „равно", „больше" и „меньше"; 2) понятия о „сумме и разности двух отрезков" имеют вполне определенный смысл.

На практике для построения отрезка, равнаго данному, пользуются **циркулем**.

11. Упражнения. 1. Назвать слагаемые отрезки и их сумму в каждом из следующих изображений; записать (чер. А).



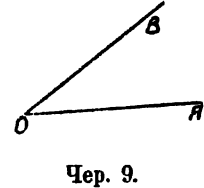
Чер. А.

2. На тех же чертежах указать, какой отрезок можно считать разностью двух других отрезков; записать.

3. Данный отрезок разбить на 2, на 3, на 4 слагаемых; записать.

4. Данный отрезок представить, как разность двух других отрезков.

12. Мы можем построить **фигуру, состоящую из двух лучей, исходящих из одной точки**,—такая фигура называется **углом**. На чер. 9 изображен угол, состоящий из лучей OA и OB, исходящих из точки O. Эта точка называется **вершиною** угла, а каждый луч называется его **стороною**. Слово „угол" заменяется знаком $\angle$. Угол называется тремя буквами, из которых одна ставится при вершине, а две другие где-либо на сторонах угла,—



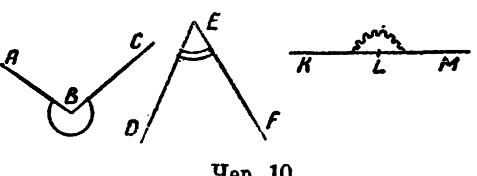
Чер. 9.

буква при вершине ставится в середине названия угла. На чер. 9 имеем $\angle AOB$ или $\angle BOA$; иногда угол называют одною буквою.

поставленной при его вершине, говоря $\angle O$. Стороны угла (лучи) надо считать идущими без конца.

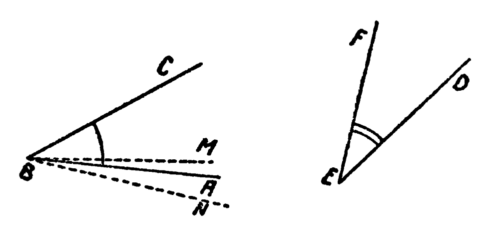
Особенный случай угла представится тогда, когда его стороны составляют одну прямую линию; такой особенный угол называют **выпрямленным** или **развернутым** углом (на чер. 12 изображены выпрямленные углы AOB и $A_1O_1B_1$).

Каждый угол делит плоскость на 2 части, на две **области**. Одну из этих частей называют **внутреннею областью** угла и говорят, что она лежит **внутри** угла, а другую называют **внешнею областью** угла и говорят, что она лежит **вне** угла. Какую именно из этих двух частей называть внешнею областью, а какую внутреннею, — дело условия. Следует всякий раз отмечать как-либо внутреннюю, напр., область. Мы будем отмечать внутреннюю область угла кривыми линиями, начерченными на внутренней области между сторонами угла; на чер. 10 отмечены внутренние области углов ABC, DEF и выпрямленного $\angle KLM$.



Чер. 10.

Полезно вырезать углы из листа тонкого картона: кусок картона является грубым изображением части плоскости; начертив на нем два луча, исходящих из одной точки, и разрезав этот кусок по сторонам начерченного угла, мы разделим кусок картона на 2 части; возьмем одну из этих частей, про которую хотим считать, что она лежит внутри угла, а другую удалим, — тогда будем иметь модель угла вместе с его внутреннею областью. Для правильного толкования этой модели надо иметь в виду, что кусок картона есть изображение лишь части плоскости, а сама плоскость тянется без конца.



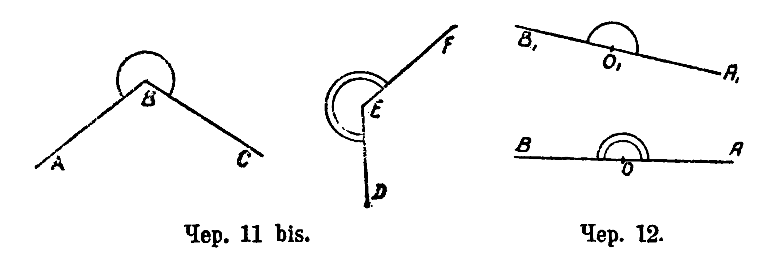
Чер. 11.

13. Сравнить два данных угла $\angle ABC$ **и** $\angle DEF$ (чер. 11).

„Сравнить“ два угла значит установить, равны ли эти углы, или один больше другого. Для этого мы станем накладывать один угол на другой так, чтобы их внутренние области пошли друг по другу: если при этом окажется, что можно достигнуть того, чтобы вершины и стороны наших углов совместились, то мы говорим, что эти углы равны; если же вершины и по одной стороне у наших углов совпадут, а другие стороны не совпадут, то углы не равны, и меньшим мы считаем тот, внутренняя область которого уложится на внутренней области другого.

Упражнение. Вырезать из бумаги модели углов вместе с их внутренними областями и, накладывая эти модели друг на друга, установить возможность случаев, описанных выше; вырезав модель одного угла, вырезать затем модель угла ему равного и модели углов ему не равных (большего и меньшего).

Обратимся к углам ABC и DEF (чер. 11); внутренняя область каждого из них на чертеже отмечена. Переносим $\angle DEF$ так, чтобы его вершина E попала в точку B и его сторона EF пошла бы по стороне BC,—тогда внутренние области углов расположатся одна по другой. Если сторона ED пойдет при этом



Чер. 11 bis. Чер. 12.

по стороне BA, то $\angle DEF = \angle ABC$; если сторона ED пойдет внутри $\angle ABC$, напр., по лучу BM, то $\angle DEF < \angle ABC$ (здесь внутренняя область угла DEF уляжется на внутренней области $\angle ABC$, и еще останется незанятой область ABM); если сторона ED пойдет вне $\angle ABC$, напр., по лучу BN, то $\angle DEF >$ $> \angle ABC$.

Полезно повторить те же рассуждения для углов ABC и DEF (с отмеченными внутренними областями), данных на чер. 11 bis.

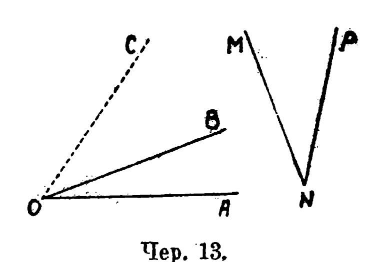
Применим изложенный способ сравнения двух углов к двум выпрямленным углам. Пусть имеем 2 выпрямленных угла $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ (чер. 12), внутренние области которых на чертеже

отмечены. Наложив один из этих углов на другой так, чтобы вершина O_1 одного попала в вершину O другого и чтобы сторона O_1A_1, одного пошла по стороне OA другого, мы придем к заключению, что и другие стороны этих углов O_1B_1 и OB совпадают, так как линии $A_1O_1B_1$ и AOB суть прямые, положение которых определяется двумя точками. (Говорят иногда: „OB есть продолжение OA" вместо того, чтобы говорить, что линия AOB есть прямая). Поэтому приходим к заключению:

Все выпрямленные углы равны между собою.

14. Выпрямленный $\angle AOB$ (чер. 12) делит плоскость на 2 области, на внутреннюю и внешнюю. Если перегнуть плоскость по прямой AOB, то обе эти части придут в совпадение. Поэтому можно принять, что внутренняя и внешняя области у выпрямленного угла равны между собою.

Если имеем какой-либо невыпрямленный угол, напр., $\angle DEF$ (чер. 11 или чер. 11 bis), то, продолжив одну его сторону, напр., сторону DE (на чертежах продолжений не начерчено), мы увидим, что о нашем угле можно установить, что он или меньше выпрямленного (чер. 11), или больше его (чер. 11 bis); зависит это от того, какую из двух частей плоскости принять за внутреннюю область угла. Обычно выбирают внутреннюю область угла так, чтобы этот угол оказался меньше выпрямленного, причем условимся в таком случае не отмечать внутренней области угла. Иногда происхождение угла укажет, что за внутреннюю область надо счесть ту часть плоскости, что угол окажется больше выпрямленного. Эти случаи в дальнейшем будут иногда иметь место, и тогда мы уже должны отмечать внутреннюю область угла.



Чер. 13.

15. Найти сумму двух углов: $\angle AOB$ и $\angle PNM$ (чер. 13), или сложить $\angle AOB$ и $\angle PNM$.

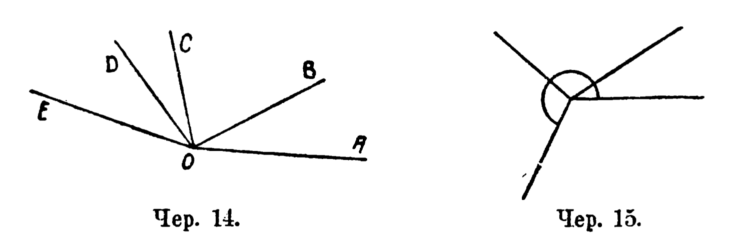
Здесь на чертеже не отмечены внутренние области углов; согласно замечанию предыдущего п°, это значит, что их надо выбрать так, чтобы каждый угол был меньше выпрямленного, и мы ясно видим эти области.

Переносим $\angle PNM$ так, чтобы его вершина N совпала вершиною O угла AOB, и вращением около точки O достигаем того, чтобы сторона NP пошла по стороне OB; тогда внутренние области наших углов окажутся приложенными друг к другу,— это обстоятельство является существенным для сложения углов. Отметим затем, как пойдет сторона NM: пусть, напр., она пойдет по лучу OC. Тогда получим новый $\angle AOC$, который принимается за сумму двух данных углов. Мы можем написать:

1) $\angle BOC = \angle PNM$, 2) $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
и 3) (на основании 1) $\angle AOC = \angle AOB + \angle PNM$.

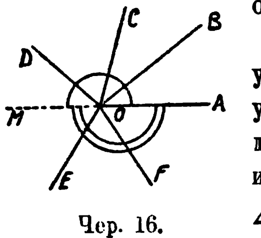
Так же можно складывать несколько углов; можно разбивать данный угол на несколько слагаемых. На чер. 14 имеем:

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE.$$



Чер. 14. Чер. 15.

Легко построить два или несколько приложенных друг к другу углов, чтобы сумма их оказалась равна выпрямленному углу. Возможно, что сумма нескольких углов окажется больше выпрямленного угла (чер. 15), внутреннюю область этой суммы следует отметить.



Чер. 16.

Возможен еще особый случай сложения углов, когда внутренние области слагаемых углов покрывают собою, когда их приложат друг другу, всю плоскость. На чер. 16 имеем такие углы: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOF$ и $\angle FOA$. В этом случае, построив луч OM, являющийся продолжением луча OA, видим, что сумма наших углов состоит из двух выпрямленных углов: 1) выпрямленный $\angle AOM$, внутренняя область которого отмечена одною кривою линиею, и 2) вы

прямленный $\angle AOM$, внутренняя область которого отмечена двойною кривою линиею. Здесь мы имеем:

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF + \angle FOA =$$
$$= 2 \text{ выпрямленным углам.}$$

Говорят: Сумма всех последовательных углов, окружающих точку, равна двум выпрямленным углам.

Если имеются слагаемые углы еще, кроме построенных на чер. 16, то их придется прикладывать к прежним опять по первому выпрямленному углу, и тогда сумма получается больше двух выпрямленных углов, равная трем выпрямленным углам, больше трех выпрямленных углов и т. д.

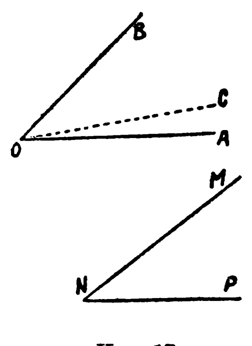
16. Найти разность двух углов: $\angle AOB$ и $\angle MNP$ (чер. 17), или вычесть $\angle MNP$ из $\angle AOB$, полагая, что $\angle MNP < \angle AOB$.

Перенесем $\angle MNP$ так, чтобы его вершина N попала в вершину O угла AOB; вращением около точки O достигаем затем, чтобы сторона NM пошла по стороне OB, причем внутренние области этих углов расположатся одна на другой. Пусть сторона NP пойдет по лучу OC; тогда получим новый $\angle AOC$, о котором знаем, что $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$, откуда, согласно определению вычитания, как действия обратного сложению, получим:

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle COB,$$

но $\angle COB = \angle PNM$; поэтому

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle PNM.$$



Чер. 17.

Из nn° 13—16 мы должны усвоить мысль, что к углам, как и к отрезкам, приложимы понятия: больше, меньше, равно, и что понятия о сумме и разности двух углов имеют определенный смысл.

17. **Упражнения.** 1. Построить два приложенных друг к другу угла, назвать их буквами, указать их сумму и записать сложение этих углов.

2. На том же чертеже указать, что один из углов есть разность двух других; записать это.

3. На следующих чертежах (см. чер. *B*) $\angle AOB$ выразить разностью двух других углов.

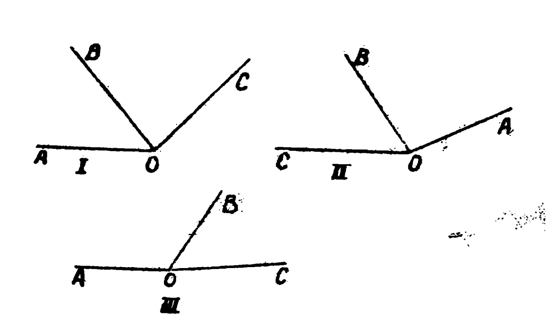
4. Данный угол разбить на 2, на 3, на 4 слагаемых; всякий раз записывать это; сделать то же самое с выпрямленным углом.

5. Данный угол представить в виде разности между выпрямленным и каким-либо другим углом. Какое построение необходимо для этого?

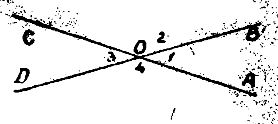
6. Производить сложение и вычитание углов, пользуясь моделями углов, вырезанных из бумаги.

18. В дальнейшем мы часто будем нумеровать углы, чтобы, называя их нумерами, сократить письмо. Нумера углов будем писать внутри каждого угла около вершины.

Построим $\angle AOB$ (чер. 18) и будем называть его $\angle 1$. Дополним этот угол до выпрямленного. Задача имеет два решения: построим луч OC, служащий продолжением луча OA; тогда получим $\angle BOC$ или $\angle 2$, удовлетворяющий требованию, так как видим, что



Чер. B.



Чер. 18.

$$\angle 1 + \angle 2 = \text{выпрямленному углу.}$$

Здесь мы имеем пример сложения двух углов, когда сумма равна выпрямленному углу,—такие углы называются **смежными**: $\angle 1$ и $\angle 2$ суть смежные углы. Чтобы 2 угла можно было назвать именем „смежные", надо, чтобы 1) они были приложены друг к другу и 2) чтобы их сумма равнялась выпрямленному углу, или, что то же самое, чтобы эти углы имели общую вершину (у углов 1 и 2 общая вершина O), одну общую сторону (у наших углов общая сторона OB) и чтобы две другие стороны являлись продолжением одна другой (OC есть продолжение OA).

Второе решение нашей задачи получится, если продолжить сторону OB, — пусть OD есть продолжение OB; тогда получим

еще $\angle AOD$ или $\angle 4$, смежный с $\angle 1$. Назовем еще полученный угол COD через $\angle 3$.

Исследуем 2 полученных решения нашей задачи, т.-е. $\angle 2$ и $\angle 4$. Мы видим особенность расположения $\angle 2$ и $\angle 4$: у них общая вершина O, стороны одного из них являются продолжениями сторон другого, а именно OC есть продолжение OA и обратно, и OB есть продолжение OD и обратно, — такие два угла называются вертикальными.

Затем мы знаем, что и $\angle 2$ и $\angle 4$ дополняют каждый в отдельности $\angle 1$ до выпрямленного; отсюда заключаем, что

$$\angle 2 = \angle 4.$$

Вот более подробное изложение последнего соображения. Согласно построению, мы имеем:

1) $\angle 1 + \angle 2$ = выпрямленному углу
2) $\angle 1 + \angle 4$ = выпрямленному углу.

Мы видим, что оба сложения ведут к одинаковой сумме (все выпрямленные углы ведь равны между собою), и, кроме того, одно слагаемое (а именно $\angle 1$) в обоих сложениях одно и то же; отсюда заключаем, что и другие слагаемые должны быть равны между собою, т.-е. $\angle 2 = \angle 4$.

Если построить две пересекающихся прямых линии, то получим две пары вертикальных углов. На чер. 18 имеем прямые AC и BD, одна пара вертикальных углов есть $\angle 2$ и $\angle 4$, а другая $\angle 1$ и $\angle 3$. Все предыдущее применимо к каждой паре вертикальных углов; напр., для пары $\angle 1$ и $\angle 3$ имеем, что каждый из них дополняет $\angle 2$ до выпрямленного, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. Поэтому имеем теорему:

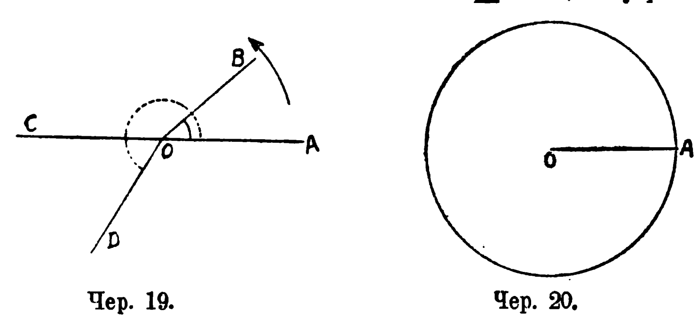
Вертикальные углы равны между собою.

Упражнение. Построить через точку три прямых и указать полученные вертикальные углы; записать их равенство.

ГЛАВА II.

Вращение луча около центра.

19. Если луч OA (чер. 19) вращается по плоскости около точки O по направлению, указанному стрелкою, и если он достигнет положения OB, то два положения вращающегося луча: начальное OA и конечное OB составят $\angle AOB$, внутреннею



Чер. 19. Чер. 20.

областью которого (она отмечена на чертеже) считаем ту часть плоскости, которую опишет вращающийся луч. Поэтому:

Угол можно рассматривать, как результат поворота луча около точки.

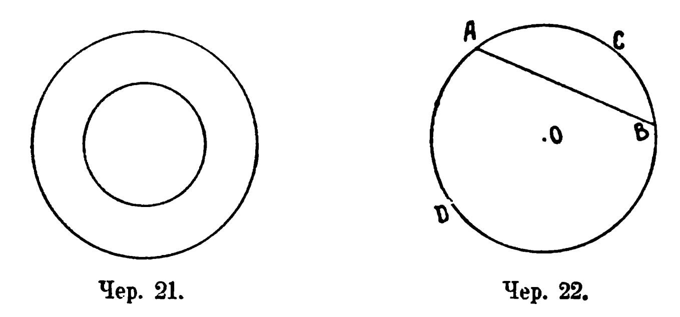
Если конечное положение луча окажется продолжением начального — на чертеже OC есть продолжение OA, — то результатом поворота луча явится выпрямленный угол. Если вращающийся луч еще повернется, то получим $\angle AOD$, больший выпрямленного угла; его внутренняя область отмечена пунктирною кривою линиею. Продолжая еще вращение луча, можем получить угол, равный двум выпрямленным, больший двух выпрямленных, равный трем выпрямленным и т. д.

20. Если вращать по плоскости отрезок OA (чер. 20) около одного из своих концов, напр., около точки O, то другой конец A опишет замкнутую линию, называемую **кругом** или **окружностью**. Эта линия ограничивает определенную часть плоскости, называемую **площадью** круга (или окружности). Точка O, около которой вращается отрезок, называется центром этого круга. Если

какую-либо точку круга (окружности) соединить с центром прямолинейным отрезком, то этот отрезок всегда равен тому, вращением которого образован круг. Называют радиусом круга отрезок, соединяющий точку круга с его центром. Ясно, что все радиусы круга равны между собою. На практике для черчения круга употребляют циркуль. Мы принимаем: на плоскости можно построить круг, центр и радиус которого даны [1]).

Если взять точку на площади круга или внутри круга, то отрезок, соединяющий эту точку с центром, меньше радиуса; если точка расположена где-либо на остальной части плоскости, или, другими словами, вне круга, то отрезок, соединяющий эту точку с центром, больше радиуса круга.

Если построим два круга (черт. 21), имеющие общий центр, но различные радиусы, то один из них, у которого радиус меньше, расположится внутри другого, — такие два круга называются концентрическими. Если построить два круга одинаковыми



Чер. 21. Чер. 22.

радиусами, то ясно, что эти круги должны совпасть, если привести в совпадение их центры; говорят, что круги с одинаковыми радиусами равны между собою.

21. Каждая пара точек окружности делит ее на 2 части; напр., точки A и B (чер. 22) делят окружность на части ACB и ADB. Каждая из этих частей наз. дугою и обозначается знаком $\smile$. Итак, на чертеже имеем две дуги: $\smile ACB$ и ADB.

---

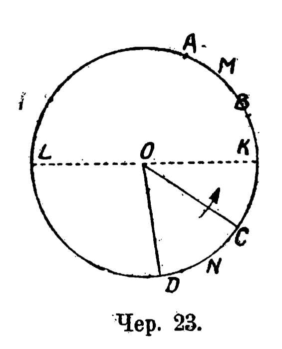
[1]) Построение круга циркулем ясно указывает нам, что круг образуется вращением того отрезка, который мы можем мысленно вообразить между концами ножек циркуля, около одного из концов этого отрезка.

Прямолинейный отрезок, соединяющий концы дуги, называется хордою, стягивающею эту дугу. Хорда AB стягивает $\smile ACB$ и стягивает $\smile ADB$. Наоборот, $\smile ACB$ (или $\smile ADB$) стягивается хордою AB.

Дуги одного круга можно сравнивать между собою, т. е узнавать, равны ли они, или одна из них больше другой. Пусть, напр., требуется сравнить $\smile AMB$ и $\smile CND$ (чер. 23); для этого надо наложить $\smile CND$ на $\smile AMB$. Чтобы удобнее представить процесс наложения, построим радиусы OC и OD и станем вращать фигуру $OCND$ около центра по направлению стрелки до тех пор, пока точка C не придет в точку A: тогда $\smile CND$ пойдет по $\smile AMB$ (это видно из самого образования круга — n°20). Если точка D совпадает с точкою B, то дуги совпали, и мы признаем их равными: если точка D расположится где-либо внутри $\smile AMB$, то $\smile CND < \smile AMB$; если точка D расположится вне $\smile AMB$, то $\smile CND > \smile AMB$. Так же легко установить, что можно находить сумму и разность дуг.

Мы уже знаем, что всякая пара точек делит окружность на 2 дуги, напр., на чер. 22 имеем $\smile ACB$ и $\smile ADB$. Иногда дугу называют двумя буквами $\smile AB$, и тогда под этим обозначением понимают меньшую из двух дуг, разделяемых точками A и B.

22. Построим какую-либо прямую KL (чер. 23), проходящую через центр нашего круга. Отрезок (напр., OC), вращением которого образовался круг, приходит два раза во время вращения, и только два раза, в совпадение с этою прямою: один раз, когда он займет положение OK, и другой раз в положении OL. Поэтому прямая KL имеет с кругом две общих точки K и L. Поэтому:



Чер. 23.

Всякая прямая, проходящая через центр круга, имеет с ним две, и только две, общих точки.

Отрезок KL, соединяющий эти две общих точки, называется диаметром круга. Ясно, что диаметр равен двум радиусам (напр., $LK = LO + OK$).

23. Возьмем на круге две дуги, $\smile AB$ и $\smile CD$ (чер. 24) и соединим концы их с центром O; тогда при центре получим углы: $\angle AOB$ и $\angle COD$. Эти углы называются центральными. Говорят: центральный угол AOB соответствует дуге AB и, наоборот, $\smile AB$ соответствует центральному $\angle AOB$. Иногда говорят: центральный $\angle AOB$ опирается на $\smile AB$. Выполним ряд сравнений:

1) Сравнить $\smile AB$ и $\smile CD$, если $\angle AOB = \angle COD$.

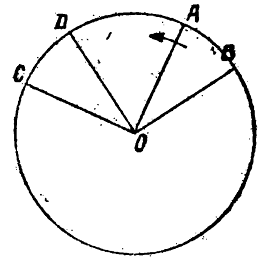
Вращая фигуру AOB по стрелке до тех пор, пока радиус OA не пойдет по OC найдем, что вследствие данного равенства углов радиус OB должен пойти по OD, и, следов., $\smile AB$ совместится с $\smile CD$. Следов., $\smile AB = \smile CD$.

2) Сравнить $\smile AB$ и $\smile CD$, если $\angle AOB > \angle COD$.

Поступая так же, как выше сообразим, что здесь радиус OB должен пойти вне угла COD, и точка B упадет где-либо на окружности за точкою D· следовательно, здесь $\smile AB > \smile CD$.

3) Сравнить $\angle AOB$ и $\angle COD$, если $\smile AB = \smile CD$.

Так как дуги равны, то, поступая согласно n° 21, можно достигнуть того, чтобы их концы совместились, и тогда радиусы OA и OB должны совместиться соответственно с OC и OD. Следов., $\angle AOB = \angle COD$.



Чер. 24.

4) Сравнить $\angle AOB$ и $\angle COD$, если $\smile AB > \smile CD$.

Поступая так же, как выше, найдем, что здесь точка A совпадет с C, а точка B попадет куда-либо на окружность за точку D, и, следов., радиус OA совместится с OC, но радиус OB пойдет вне угла COD. Следов., $\angle AOB > \angle COD$. Итак:

Равным центральным углам соответствуют равные дуги и хорды, большему центральному углу соответствует большая дуга; обратно, равным дугам соответствуют равные центральные углы, большей дуге соответствует больший центральный угол. Также: если 2 хорды равны, то равны и стяг. ими дуги и соотв. центр. углы.

24. Если мы перегнем плоскость, на которой расположена окружность (см., напр., чер. 23), по диаметру LK, то одна часть этой окружности должна при этом перегибании совместиться с другою в силу того, что все радиусы круга равны между собой, а центр при перегибании остался на месте. Это свойство окружности выражают словами:

Диаметр делит окружность пополам,

или

Окружность симметрична относительно диаметра.

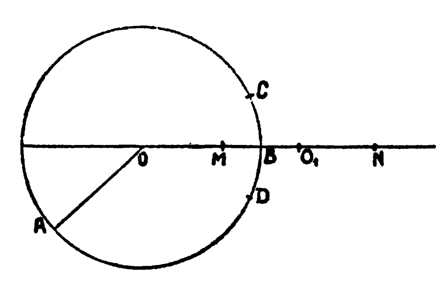
или

Диаметр есть ось симметрии окружности.

Вообще, если при перегибании фигуры по какой-либо прямой одна ее часть совмещается с другою, то говорят, что эта фигура симметрична относительно прямой перегиба, или, что прямая, по которой перегибалась фигура, есть ось симметрии этой фигуры.

25. Пусть имеем две окружности с разными центрами. Если можно сообразить, что одна точка второй окружности лежит внутри первой и другая точка второй окружности вне первой, то нашему представлению ясно, что такие две окружности должны иметь общую точку — должны пересекаться. Ясно это из того, что окружность есть непрерывная линия, ограничивающая определенную площадь.

Пусть, напр., имеем окружность O (чер. 25) (окружность часто называют одною буквою по имени ее центра), пусть центр другой окружности есть точка O_1. Соединив точки O и O_1 прямою линиею, получим прямую OO_1, называемую линиею центров этих двух кругов. Эта прямая должна иметь (n°22) со второю (не нарисованною) окружностью две общих точки по разные стороны центра, напр., M и N, и тогда O_1M и O_1N суть радиусы этой окружности, и, следов., $O_1M = O_1N$, а MN есть диаметр этой окружности. Допустим, что точка M лежит внутри круга O и точка N вне круга O.



Чер. 25.

Тогда ясно, что окружность O_1, переходя из точки M в точку N, должна где-либо встретить окружность O — должна ее пересечь, и эта точка пересечения есть общая точка обеих окружностей: она принадлежит и окружности O и окружности O_1.

Мы можем найти условия, когда две окружности непременно должны пересечься. Обозначим радиус OA первой окружности для краткости одною буквою a, т.-е. пусть $OA = a$ и, следов., также $OB = a$; радиус второй окружности обозначим b, — следов., $O_1M = b$ и $O_1N = b$; наконец, обозначим отрезок, соединяющий центры наших кругов, буквою c, т.-е. $OO_1 = c$. Тогда $OM = OO_1 - O_1M$ и $ON = OO_1 + O_1N$ или, пользуясь сделанными обозначениями, найдем

$$OM = c - b \text{ и } ON = c + b.$$

Для того, чтобы точка M лежала внутри первой окружности, необходимо и достаточно, чтобы отрезок OM был меньше радиуса круга O, т.-е.

$$c - b < a,$$

а чтобы точка N лежала вне первой окружности, необходимо и достаточно, чтобы отрезок ON был больше радиуса круга O, т.-е.

$$c + b > a.$$

Итак, если выполнены два только что найденных неравенства, то наши две окружности непременно пересекаются, т.-е.:

Если 1) разность между отрезком, соединяющим центры двух кругов, и радиусом одного круга меньше радиуса другого круга и 2) сумма отрезка, соединяющего центры двух кругов, и одного радиуса больше радиуса другого круга, то эти два круга пересекаются.

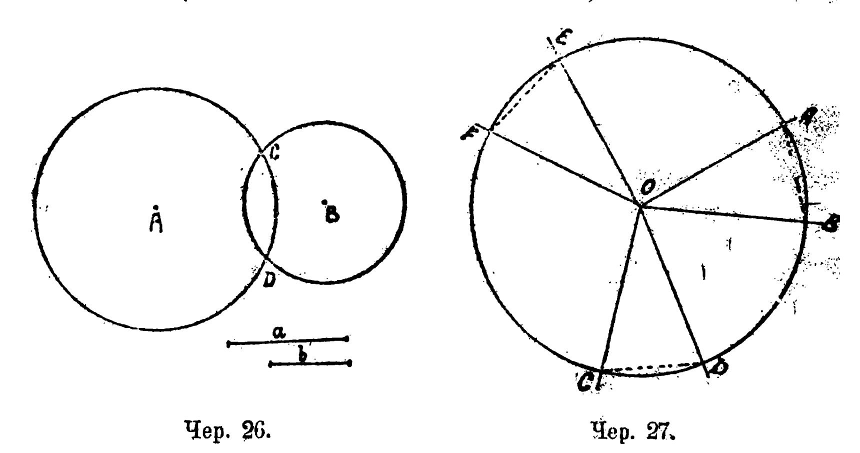
26. Изучая дальше вопрос о пересечении двух окружностей, мы прежде всего сообразим, что точка пересечения не может лежать на прямой OO_1 (чер. 25), так как на этой прямой, проходящей через центр O_1, у нас имеются 2 точки M и N, второй окружности (n° 22); следов., точка пересечения лежит где-либо вне линии центров. Пусть, напр., эта точка есть точка C. Так как линия центров OO_1, если ее продолжить, явится диаметром, как первого, так и второго круга, то вся наша фигура, состоящая из совокупности обоих кругов, симметрична относительно линии центров OO_1. Поэтому все, что имеет место по одну сторону оси симметрии OO_1, должно иметь место и по другую ее сторону, т.-е. и по другую сторону линии центров должна быть точка пересечения наших окружностей, напр., точка D.

Итак, если выполнены условия предыдущего n°, при наличности которых наши окружности пересекаются, то непременно должно быть две общих

точки у этих окружностей, расположенные симметрично по разные стороны их линии центров.

27. Задача. Найти точку, чтобы отрезки, соединяющие ее с двумя данными точками, были равны двум данным отрезкам.

Пусть даны точки A и B (чер. 26) и требуется найти такую точку, чтобы отрезок, соединяющий ее с точкою A, равнялся



Чер. 26. Чер. 27.

данному отрезку a и отрезок, соединяющий ее с точкою B, равнялся данному отрезку b.

Для решения этой задачи строим окружность с центром A радиусом $= a$ (если любую точку этой окружности соединить с ее центром A, то полученный отрезок должен быть $= a$) и из центра B окружность радиусом $= b$ (если соединить любую точку этой окружности с ее центром B, то получим отрезок $= b$). Если эти окружности пересекутся, то точки пересечения и будут искомыми точками.

Назовем отрезок AB через c. Мы знаем, если

$$c - b < a \quad \text{и} \quad c + b > a,$$

то наши окружности пересекаются в двух точках (nn° 25 и 26), например, в C и D, и тогда мы нашли два решения нашей задачи:

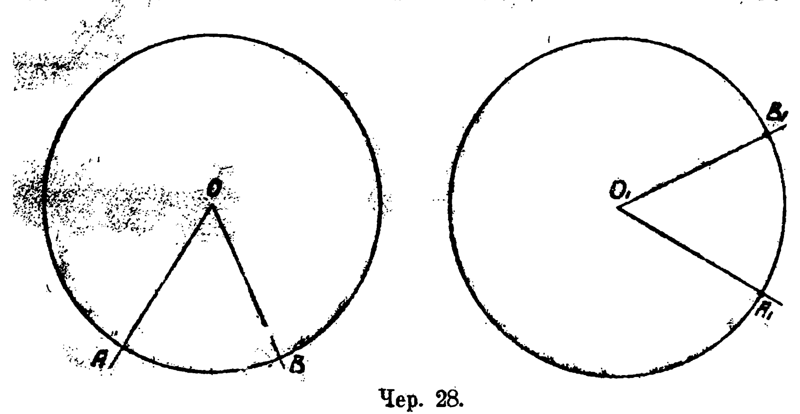
Точки C и D суть искомые.

Если же условия $c - b < a$ и $c + b > a$ не будут выполнены, то задача не имеет решения, — найти такой точки невозможно.

28. Построение угла, равного данному. Из свойств дуг, хорд и центральных углов (n° 23) мы приходим к заключению о возможности строить равные углы. Если имеется круг O (чер. 27) и какой-либо центральный угол AOB, то он вырезает

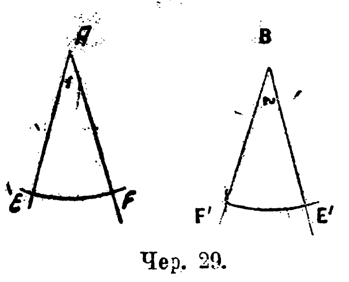
на круга дугу AB, которая стягивается хордою AB. Взяв циркулем эту хорду (она на чертеже изображена пунктиром), перенесем ее в какое-либо иное положение на том же круге, напр., в положение CD (след., хорда CD = хорде AB) или в положение EF (хорда EF = хорде AB); тогда, соединив лучами центр O с концами этих хорд, получим $\angle COD = \angle AOB = \angle EOF$.

Итак, мы можем теперь построить сколь угодно углов, равных данному, при одной и той же вершине. Попытаемся теперь построить угол, равный данному, при иной вершине. Пусть имеем круг O (чер. 28) и в нем центральный $\angle AOB$. Построим другой



Чер. 28.

круг O_1 тем же радиусом — круги O и O_1 (n° 20) равны между собою. Затем, взяв циркулем хорду AB, перенесем ее, напр., в положение A_1B_1, на круг O_1 (хорда A_1B_1 = хорде AB — на чертеже эти хорды не изображены, так как их легко вообразить). Тогда, построив лучи O_1A_1 и O_1B_1, получим $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$.



Чер. 29.

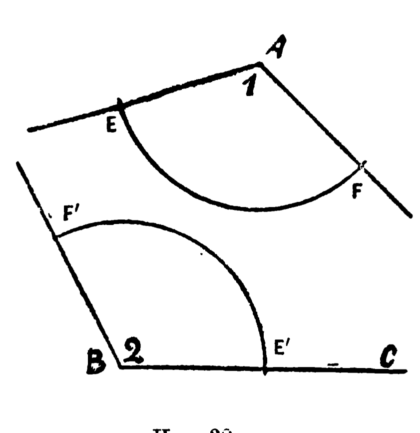
Пусть теперь дан $\angle 1$ (чер. 29) при вершине A. Пристроим к нему круг так, чтобы $\angle 1$ вышел центральным; для этого, принимая точку A за центр, опишем произвольным радиусом или полный круг, или, что проще, только дугу круга так, чтобы определились точки E и F, где стороны $\angle 1$ пересекаются с кругом. Тогда определится и хорда EF, соответ-

ствующая $\angle 1$-му. Затем, принимая любую точку B за центр, построим таким же радиусом ($BE' = AE$) дугу и на ней циркулем отметим концы E' и F' хорды $E'F'$, равной хорде EF. Тогда $\angle E'BF' = \angle EAF$ или $\angle 2 = \angle 1$.

Теперь мы можем решить задачу:

Построить при данной точке угол, равный данному, так, чтобы одна его сторона шла по данному лучу.

Пусть дан $\angle 1$ с вершиною A (чер. 30) и даны еще точка B и луч BC. Требуется построить угол, равный $\angle 1$, так, чтобы его вершина была в точке B и одна сторона шла по лучу BC.



Чер. 30.

Опять пристраиваем к $\angle 1$ дугу, принимая т. A за центр (радиус произволен),—тогда определится хорда EF, соответствующая этому углу. Тем же радиусом строим дугу, принимая точку B за центр, причем определится точка E', где эта дуга пересекается с лучом BC. Берем затем хорду EF и этим радиусом, принимая т. E' за центр, строим дугу, пересекающуюся с первой дугой (центр которой в B) в точке F'. Тогда хорда $E'F' =$ хорде EF и, следов., $\angle F'BE' = \angle FAE$ или $\angle 2 = \angle 1$.

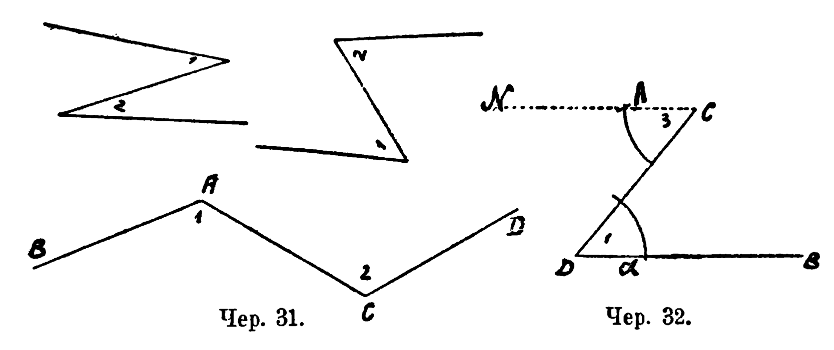
Упражнения. 1. Даны $\angle 1$ и $\angle 2$; построить сумму и разность этих углов.

2. Построить сумму трех данных углов.

ГЛАВА III.

Параллельные прямые.

29. Нарисуем (от руки) несколько зигзагов, вроде данных на чер. 31. В каждом из этих зигзагов мы видим по 2 угла (они занумерованы нумерами 1 и 2 в каждом зигзаге чертежа 31). Каждый зигзаг состоит из двух лучей и отрезка, соединяющего



Чер. 31. Чер. 32.

точки, из которых исходят лучи. Напр., в последнем зигзаге имеем: 1) луч AB, исходящий из точки A, 2) луч CD, исходящий из точки C и 3) отрезок AC. Углы 1-ый и 2-ой принято называть внутренними накрест-лежащими углами по отношению к лучам, составляющим этот зигзаг. Упражнения должны приучить глаз к расположению таких углов.

Построим теперь зигзаг так, чтобы его углы были бы равны между собою. Для этого начнем построение с произвольного угла BDC (чер. 33, I) или с $\angle 1$; затем, закрепив точку C, построим при ней, согласно n° 28, $\angle 3$ (или $\angle MCD) = \angle 1$ [1]).

---

[1]) Для большей ясности воспроизводим это построение здесь на чер. 32.

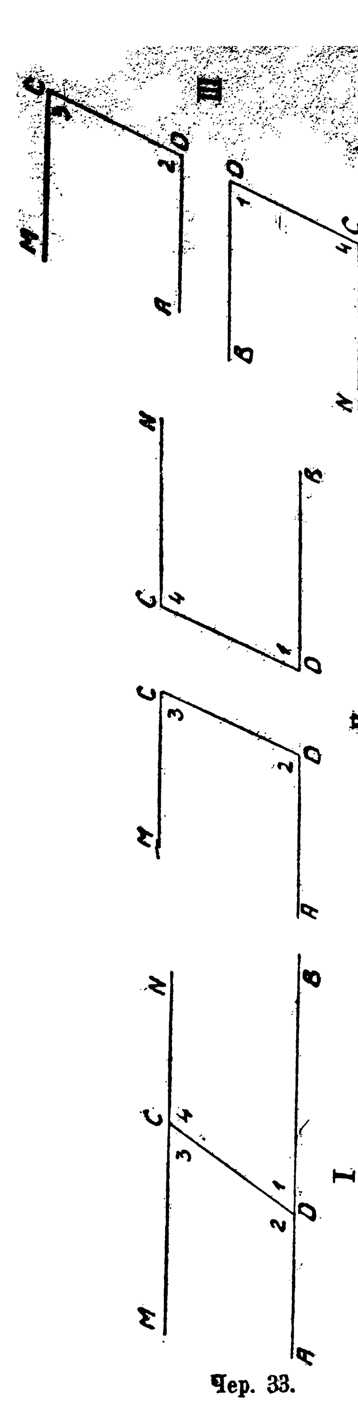
1) строим $\smile \alpha$, принимая точку D за центр, произвольным радиусом;

2) тем же радиусом строим $\smile \beta$, принимая точку C за центр;

3) берем циркулем хорду дуги α, соответствующую углу 1-му — концами ее служат точки пересечения дуги α с лучам DB и отрезком DC;

4) эту хорду откладываем на $\smile \beta$ от точки пересечения этой дуги с отрезком DC, наблюдая, чтобы угол при точке C, соответствующий этой хорде, оказался внутренним накрест-лежащим с $\angle 1$;

5) соединив конец этой хорды с точкою C, получим $\angle 3 = \angle 1$, причем эти углы — внутренние накрест-лежащие.



Чер. 33.

Тогда получим требуемый зигзаг $MCDB$. Если лучи MC и DB продолжить (CN есть продолжение луча CM и DA — продолжение DB), то получим еще 2-ой зигзаг $NCDA$, внутренние накрест-лежащие углы которого обозначены нумерами 2 и 4. В общем, полученная фигура состоит из трех прямых MN, AB и CD, причем о последней заведомо известно, что она пересекает MN в точке C и AB в точке D, почему мы и будем прямую CD называть **секущею**.

Разучим полученную фигуру.

1. Мы видим, что $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные, т.-е. видим, что

$$\angle 1 + \angle 2 = \text{выпр. углу.}$$

Также видим, что $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные, т.-е.

$$\angle 3 + \angle 4 = \text{выпр. углу.}$$

Но мы строили $\angle 3 = \angle 1$. Поэтому заключаем, что обязательно $\angle 4$ должен равняться $\angle 2$. Итак, оказалось, что и вторая пара внутренних накрест-лежащих углов ($\angle 2$ и $\angle 4$) состоит из равных углов. Это обстоятельство заслуживает внимания, и мы его можем запечатлеть словами: **если две прямые пересечены секущею и если два внутренних накрест-лежащих угла равны между собою, то и другие два внутр. накр.-леж. угла тоже равны** [1]).

---

[1]) Всякое свойство фигуры, выраженное словами и полученное после некоторых рассуждений, называется **теоремою**. Здесь мы имеем теорему о внутренних накрест-лежащих углах.

2. Всю фигуру, данную на чер. 33, I, мы расчленим на 2 фигуры: фигуру $MCDA$ и фигуру $NCDB$ — мы будем их называть „левою“ и „правою“ фигурами. Для ясности представим эти фигуры отдельно (чер. 33, II). У них имеется по равному отрезку: отр. CD левой фигуры равен отрезку CD правой, так как ранее эти отрезки совпадали. Наложим, пользуясь этим равенством, правую фигуру на левую (понадобится правую фигуру повернуть, как на чер. 33, III, а затем уже накладывать на левую) так, чтобы точка D правой фигуры совместилась с точкою C левой и чтобы отрезок DC правой пошел по отрезку CD левой; в силу их равенства и другие их концы совместятся. Так как затем по построению $\angle 3 = \angle 1$, то луч DB правой фигуры должен пойти по лучу CM левой, в силу же выясненного равенства $\angle 2$ и $\angle 4$, луч CN правой должен пойти по лучу DA левой. Отсюда заключаем, что наши фигуры равны (это слово „равны“ в геометрии и означает, что одна фигура совмещается при наложении с другой).

3. Обращаясь опять к чер. 33, I, мы можем спросить: пересекаются ли прямые MN и AB? Если предположить, что они пересекаются и точка пересечения расположена справа от секущей CD, то, в силу равенства правой и левой фигуры, мы должны притти к заключению, что и слева от секущей CD должно быть то же, что и справа, т.-е. и слева должна быть точка, через которую проходят обе прямые и MN и AB. Тогда оказалось бы, что через 2 точки проходят две прямые MN и AB, что невозможно. Следовательно, предположение, что AB и MN пересекаются справа от секущей, не годится. Ясно, что также нельзя допустить, что они пересекаются слева от секущей. Поэтому приходим к заключению, что нам удалось построить две прямые AB и MN, которые друг с другом вовсе не пересекаются.

Две прямые, расположенные на одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными прямыми.

Для обозначения параллельности двух прямых употребляют знак $||$; таким образом мы имеем $MN || AB$ (MN параллельна AB). Из предыдущего построения вытекает:

можно построить параллельные прямые

или:

параллельные прямые существуют.

Мы можем фигуру, данную на чер. 33 (I), строить в ином порядке: 1) построим произвольную прямую AB (будем ее называть данною); 2) вне ее построим произвольную точку C (ее также будем называть данною); 3) через точку C строим секущую CD, образующую с данною прямою AB $\angle 1$ и $\angle 2$; 4) при точке C строим $\angle 3 = \angle 1$ так, чтобы эти углы оказались внутренними накрест-лежащими — получим луч CM; 5) продолжаем луч CM по направлению CN — тогда получим прямую MN, параллельную AB.

Отсюда вытекает заключение:

Через точку, данную вне данной прямой, всегда можно построить прямую, параллельную данной.

Так как для построения параллельных прямых необходимо было построить равные внутр. накрест-лежащие углы ($\angle 3 = \angle 1$), то заключаем еще, что

если две прямые пересечены секущею и если полученные внутренние накрест-лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.

30. В предыдущем n° мы научились строить через данную точку прямую, параллельную данной. Возникает теперь вопрос: сколько можно построить через данную точку прямых, параллельных данной? Ответ на этот вопрос возможен лишь на основе нашего представления о расположении параллельных прямых: если мы представим, что прямая MN (чер. 33, I), которая $\parallel AB$, повернется около точки C в том или ином направлении, то нам ясно, что параллельность нарушится и что тогда MN где-либо с одной стороны от секущей CD пересечется с AB; может быть эта точка пересечения окажется так далеко, что на чертеже мы не будем в состоянии ее изобразить, но от этого наша уверенность в том, что прямая AB и повернутая прямая MN пересекаются, не уменьшится. Рассуждениями, основанными на предыдущем, подкрепить эту уверенность оказывается невозможным. Поэтому принимают, только на основании нашего представления. что

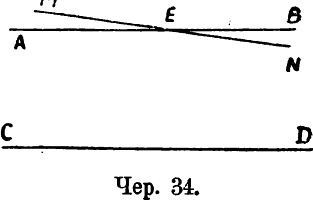
через точку, данную вне прямой, можно построить только одну прямую, параллельную данной.

Впервые это положение введено в науку знаменитым греческим геометром Евклидом, который дал полный систематический курс геометрии (за 300 лет до Р. Х.). Это свойство озаглавлено им именем „XI аксиома", которая выражена несколько иначе, чем здесь, но ее основная мысль та же самая. Иногда это же свойство называют именем „V постулат Евклида". Разница между этими двумя названиями следующая: аксиомами называют такие свойства, которые очевидны сразу, и мысль о том, что их нельзя путем рассуждений вывести из других свойств, уже установленных, появляется при тщательном рассмотрении системы геометрии; постулатами называют допущения, которые необходимо принять, чтобы итти дальше, но справедливость которых не столь очевидна. Впрочем, разница между этими двумя понятиями столь незначительна, что их часто смешивают.

В тех словах, которыми мы здесь выразили постулат Евклида о параллельных, заключаются 2 мысли: 1) через точку можно построить прямую, параллельную данной,—эта мысль отнюдь не относится к содержанию постулата: в n°29 мы выяснили возможность такого построения; 2) только одну параллельную,—эта мысль, выражаемая словами „только одну", и составляет содержание постулата.

31. Из постулата о параллельных сейчас же вытекают несколько новых свойств, которые поэтому можно назвать следствиями из постулата о параллельных.

I. Пусть построено: 1) $AB \parallel CD$ (черт. 34); 2) прямая MN, пересекающая AB в точке E. Возникает вопрос: пересекаются ли MN и CD?



Черт. 34.

Ответ ясен: нельзя допустить, что MN не пересекает CD,—тогда бы через точку E оказались бы построенными две прямых AB и MN, параллельных CD, что противоречит постулату о параллельных.

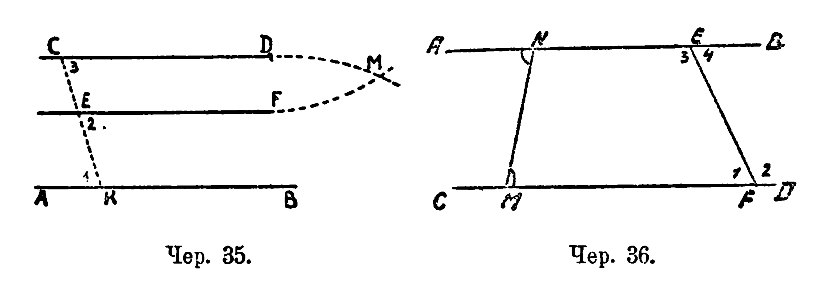
II. Пусть построено: 1) $EF \parallel AB$ и 2) $CD \parallel AB$ (чер. 35) (для этого построения удобно воспользоваться только одною секущею CEK и построить $\angle 2 = \angle 1$ и $\angle 3 = \angle 1$). Возникает вопрос: пересекаются ли или нет прямые CD и EF?

Допустим, что CD и EF пересекаются в точке M; тогда оказалось бы, что через M построены две прямые MDC и MFE, параллельные порознь прямой AB, что противоречит постулату о параллельных. Отсюда приходим к заключению, что $CD \parallel EF$. Возможен, конечно, случай, что данные точки C и E расположены так, что построенные через них прямые, параллельные AB, сливаются в одну. Итак, имеем:

Если через каждую из двух данных точек построить прямую, параллельную данной, то построенные прямые или параллельны между собою или сливаются в одну прямую.

На основании этого случай совпадения двух прямых часто рассматривают, как частный случай параллельности.

III. Пусть построено: 1) $AB \parallel CD$ при помощи секущей MN (чер. 36) и 2) секущая EF, причем образовались при точках



Чер. 35. Чер. 36.

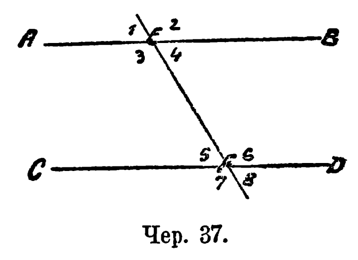
пересечения E и F внутр. накр.-лежащие углы, напр., $\angle 1$ и $\angle 4$. Возникает вопрос: равны ли между собою эти углы?

Рассмотрим точку E. Мы знаем (n°29), что через эту точку можно построить прямую, параллельную CD, для чего можно воспользоваться секущею EF и построить при точке E угол, равный $\angle 1$ так, чтобы он был внутренним накрест-лежащим с $\angle 1$; с другой стороны, на основании постулата (n°30), мы знаем, что можно построить лишь одну параллельную, а она уже по-

строена — $AB \parallel CD$, причем луч EB образует с секущею EF $\angle 4$, внутренний накрест-лежащий с $\angle 1$. Поэтому мы заключаем, что этот $\angle 4$ необходимо должен быть равным $\angle 1$. Итак,

Если две параллельных пересечены секущею, то внутренние накрест-лежащие углы равны.

32. Вообразим, что секущая EF (чер. 36) продолжена в обе стороны; тогда получим фигуру, данную на чер. 37, причем при точках E и F мы имеем 8 углов (они занумерованы нумерами 1 — 8 уже в ином порядке, сравнительно с чер. 35). Мы теперь видим, что 1) $\angle 1 = \angle 4$ (как вертикальные) $= \angle 5$ (как внутр. накрест-лежащие) $= \angle 8$ (как вертикальные); 2) $\angle 2 = \angle 3$ (как вертикальные) $= \angle 6$ (как внутр. накрест-лежащие) $= \angle 7$ (как вертикальные).



Чер. 37.

Таким образом, все 8 углов разбиваются на 2 группы: 1) $\angle 1$, $\angle 4$, $\angle 5$ и $\angle 8$ и 2) $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 6$ и $\angle 7$. Углы одной группы все между собою равны, но какой-либо угол из одной группы вообще не равен углу другой группы. Но зато мы видим, что, напр.,

$$\angle 5 + \angle 6 = \text{выпр. углу.}$$

Так как каждый из остальных углов первой группы равен $\angle 5$-му и каждый из остальных углов второй группы равен $\angle 6$-му, то заключаем, что сумма любого угла первой группы с любым углом второй группы равна выпрямленному углу. Итак:

Если две параллельных пересечены секущею, то полученные 8 углов разделяются на две группы по 4 угла в каждой: углы каждой группы равны между собою и сумма двух углов, из которых один угол принадлежит одной группе, а другой угол — другой группе, равна выпрямленному углу.

Обратим внимание на отдельные пары углов, причем в пары будем соединять углы, один из которых при вершине E, а другой при вершине F.

Мы уже знаем, что $\angle 4 = \angle 5$ и $\angle 3 = \angle 6$, т.-е., что внутренние накрест-лежащие углы равны.

Из первой группы мы имеем еще $\angle 1 = \angle 8$. Эти углы ($\angle 1$ и $\angle 8$) расположены по разные стороны секущей и их внутренние области расположены вне полосы, выделяемой прямыми AB и CD. Поэтому их называют внешними накрест-лежащими углами. Во 2-ой группе имеется также пара таких углов: $\angle 2$ и $\angle 7$, причем $\angle 2 = \angle 7$. Итак, при параллельных прямых внешние накрест-лежащие углы равны.

Из первой группы имеем $\angle 1 = \angle 5$. Эти 2 угла расположены по одну сторону секущей и один из них внешний ($\angle 1$), а другой внутренний ($\angle 5$). Такие два угла называются соответственными. Мы имеем еще пары соответственных углов: $\angle 4 = \angle 3$ (оба в I группе), $\angle 2 = \angle 6$ (оба во II группе), $\angle 3 = \angle 7$ (оба во II группе). Итак, соответственные углы при параллельных равны между собою.

$\angle 3$ принадлежит ко II группе, а $\angle 5$ — к I; поэтому $\angle 3 + \angle 5 =$ выпрям. углу. Оба этих угла расположены по одну сторону от секущей и оба они внутренние. Поэтому их называют внутренними односторонними углами. Имеется еще пара таких же углов: $\angle 4$ и $\angle 6$; для них (так как они принадлежат к разным группам) также имеем $\angle 4 + \angle 6 =$ выпрям. углу. Итак, внутренние односторонние углы при параллельных составляют в сумме выпрямленный угол.

Пары: 1) $\angle 1$ и $\angle 7$ и 2) $\angle 2$ и $\angle 8$ называются внешними односторонними углами и для них имеем (ибо углы каждой пары принадлежат к разным группам):

$$\angle 1 + \angle 7 = \text{выпр. углу}; \ \angle 2 + \angle 8 = \text{выпр. углу},$$

т.-е. внешние односторонние углы при параллельных составляют в сумме выпрям. угол.

Наконец, пары: 1) $\angle 1$ и $\angle 6$, 2) $\angle 2$ и $\angle 5$, 3) $\angle 3$ и $\angle 8$ и 4) $\angle 4$ и $\angle 7$ особого названия не имеют, но каждая пара состоит из двух углов, один из которых внешний, а другой внутренний, причем они расположены по разные стороны секущей. Так как углы каждой пары принадлежат разным группам, то имеем:

$$\angle 1 + \angle 6 = \text{выпр. углу}; \ \angle 2 + \angle 5 = \text{выпр. углу}; \ \angle 3 + \angle 8 = \text{выпр. углу}; \ \angle 4 + \angle 7 = \text{выпр. углу},$$

т.-е. при параллельных пара разносторонних углов, из которых один внутренний, а другой внешний, в сумме составляют выпрямленный угол.

33. Не трудно теперь видеть, что параллельные прямые можно строить при помощи других пар углов, не внутренних накрест-лежащих, как в n°29. В самом деле, построим при точке E (чер. 37) $\angle 1 = \angle 5$ так, чтобы эти углы были соответственными. Тогда найдем, что $\angle 1 = \angle 4$ и, след., $\angle 4 = \angle 5$, т.-е., что $AB \parallel CD$. Также можно пользоваться и внешними накр.-леж. углами (если $\angle 1 = \angle 8$, то и $\angle 4 = \angle 5$ и прямые параллельны). Можно также строить внутренние односторонние углы так, чтобы их сумма равнялась выпрямленному углу (если $\angle 3 + \angle 5 =$ выпрям., то $\angle 4 = \angle 5$, так как $\angle 3 + \angle 4 =$ выпрямл., — след., $AB \parallel CD$); можно также пользоваться и внешними односторонними углами. Итак:

Если две прямые пересечены секущею и если внутренние накрест-лежащие углы равны, или если внешние накрест-лежащие углы равны, или если соответственные углы равны, или если сумма внутренних односторонних углов равна выпрямленному, или если сумма внешних односторонних углов равна выпрямленному, или если сумма двух разносторонних углов, из которых один внутренний, а другой внешний, равна выпрямленному, то прямые параллельны.

Для построения двух параллельных прямых обычно (и это удобнее всего) пользуются или внутренними накрест-лежащими углами или соответственными.

Чер. 38.

Добавление. Постулат о параллельных прямых (n°30) может быть выражен в такой форме:

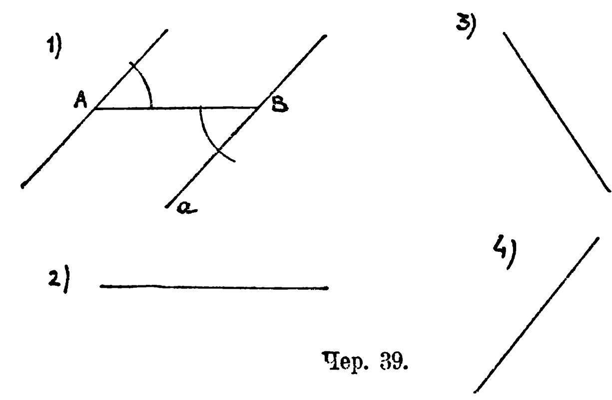
Если сумма одной пары внутренних односторонних углов меньше выпрямленного угла, а следовательно сумма другой пары больше выпрямленного, то эти прямые пересекаются с той стороны от секущей, где сумма меньше выпрямленного.

Если, например, $\angle 1 + \angle 2 <$ выпр. угла (чер. 38), то, следовательно, $\angle 3 + \angle 4 >$ выпрямл. угла, так как $\angle 1 + \angle 3 =$

=выпр. углу и $\angle 2 + \angle 4 =$ выпр. углу. Наши прямые пересекаются с той стороны секущей, где расположены $\angle 1$ и $\angle 2$. В этой именно форме и быт дан постулат о параллельных Евклидом.

34. Упражнения. 1. Построить через данную точку (см. различные положения, данные на чер. 39) прямую, параллельную данной.

На 1-м чертеже построение выполнено: из A строим секущую AB из точки B, как центра, строим дугу и таким же радиусом (удобнее



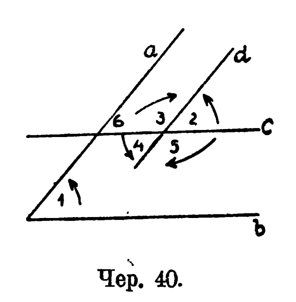
Чер. 39.

этот радиус брать небольшим) описываем дугу, принимая A за центр. Затем при A строим угол, равный $\angle$ B, чтобы получились 2 внутр. накр.-леж. угла, и т. д.

2. Построить пару параллельных прямых в каком угодно положении.

3. Даны 2 пересекающихся прямых; построить через данную точку две новых прямых, параллельных соответственно двум данным.

4. Построить две пары параллельных прямых в каком угодно положении, но чтобы все 4 прямые не были между собою параллельны.



Чер. 40.

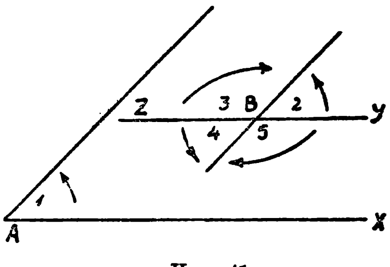
35. Построены две пары параллельных прямых: 1) $c \parallel b$ и 2) $d \parallel a$ (чер. 40) (каждая прямая названа одною малою буквою). При точке пересечения прямых a и b получились углы, рассмотрим один из них, именно $\angle 1$, и сравним его с углами 2, 3, 4 и 5-м, полученными при пересечении прямых c и d.

Продолжим прямую c до пересечения с прямой a, — при точке пересечения получим еще углы, один из которых обозначен нумером 6. Тогда имеем: 1) $\angle 2 = \angle 6$, как соответственные при параллель-

ных a и d и секущей c; 2) $\angle 6=\angle 1$, как соответственные при параллельных c и b и секущей a. Следовательно, $\angle 2=\angle 1$. Так как $\angle 4=\angle 2$, то и $\angle 4=\angle 1$. Так как $\angle 3+\angle 2=$ $=$ выпр. углу, а $\angle 2=\angle 1$, то $\angle 3+\angle 1=$ выпр. углу; также $\angle 5+\angle 1=$ выпр. углу. Заметив, что стороны $\angle 1$ параллельны сторонам любого из углов 2, 3, 4 и 5, найдем:

Если стороны двух углов попарно параллельны, то эти углы или равны между собою или в сумме составляют выпрямленный угол.

Возникает вопрос: нельзя ли установить признак, пользуясь которым можно было бы разделить эти 2 случая. Для этой цели станем смотреть на угол, как на результат вращения луча и начальным положением будем считать такое расположение лучей, когда они в $\angle 1$ и в одном из углов 2, 3, 4 или 5 располагаются параллельно, например, по прямым b и c. Тогда стрелки, данные на чертеже, укажут направление, в котором надо вращать луч, чтобы получить желаемый угол. Удобно сравнивать это направление с движением часовой стрелки. Видим, что для получения $\angle 1$ надо луч AX (чер. 41) вращать против часовой стрелки, для $\angle 2$ надо луч BY ($BY \parallel AX$) вращать против часовой стрелки, для $\angle 4$ надо луч BZ ($BZ \parallel AX$) вращать против часовой стрелки, для получения $\angle 3$ надо луч BZ вращать по часовой стрелке и для $\angle 5$ — луч BY по часовой стрелке. Отсюда можно вывести, что углы с параллельными сторонами равны, если направления их вращения одинаковы, и что такие углы дополняют друг друга до выпрямленного угла, если направления их вращения противоположны.

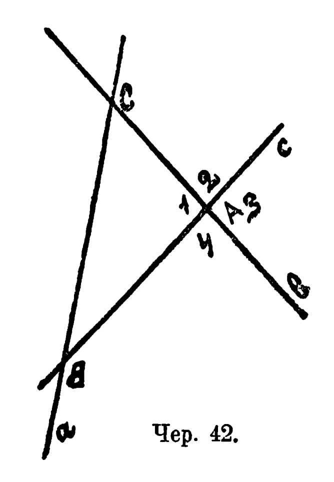


Чер. 41.

ГЛАВА IV.

Треугольники.

36. Мы уже рассматривали фигуру, состоящую из двух пересекающихся прямых (вертикальные углы, n°18). Присоединим к ним еще третью прямую, пересекающую каждую из первых двух прямых в отдельной точке. Получим фигуру, данную на чер. 42: прямая a и прямая b пересекаются в точке C, прямые b и c — в точке A и прямые c и a — в точке B (мы называем для сокращения письма и речи каждую прямую одною малою буквою). Построенная фигура называется **треугольником**. Слово „треугольник“ обозначается знаком $\triangle$; обыкновенно треугольник обозначают тремя буквами, которыми названы три точки пересечения прямых. На чер. 42 имеем $\triangle$ ABC.



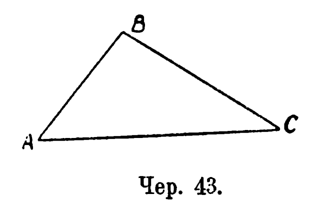
Чер. 42.

Прямые a, b и c называются **сторонами** треугольника, точки A, B и C — его **вершинами**. Треугольник разделяет плоскость на 7 областей, из которых 6 бесконечны, а одна конечная. Эта последняя ограничена сторонами треугольника и называется **площадью** треуг-ка. При каждой вершине треугольника образуется по 4 угла меньших выпрямленного, например, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ при точке A; внутренняя область одного из них, а именно $\angle 1$, захватывает площадь треуг-ка (или: площадь треугольника лежит внутри $\angle 1$) — этот угол называется **внутренним** углом треуг-ка, а остальные три ($\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$) — **внешними**. Среди внешних углов рассматривают обыкновенно лишь один при каждой вершине: при точке A $\angle 2$ или $\angle 4$, которые равны между собою, как вертикальные, а $\angle 3$ = внутреннему $\angle 1$ на том же основании. Всего имеем в треугольнике 3 внутренних угла, которые часто называются просто углами треугольника.

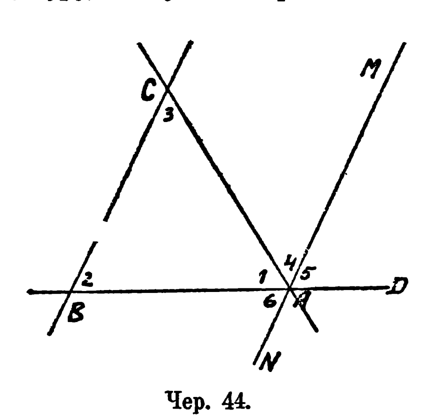
Название „сторона треугольника“ употребляется в двух смыслах: 1) этим именем называют, как указано выше, одну из трех прямых, напр., прямую a, неопределенно продолженную, 2) этим же именем называют отрезок этой прямой между двумя вершинами, напр., отрезок BC. Если вопрос таков, что приходится рассматривать только отрезки наших трех прямых, то треугольник изображают так, как на чер. 43.

В треугольнике обыкновенно рассматривают 6 элементов: три стороны (отрезки) AB, BC и CA и 3 внутренних угла — $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

37. Рассматривая $\triangle ABC$ (чер. 42), мы видим, что здесь является возможным применить построение n°29. Именно, в конце n°29 мы пришли к заключению, что если дана прямая и вне ее точка, то через эту точку можно построить прямую, параллельную данной. На чер. 42 мы можем, например, счесть прямую a за данную прямую и точку A за данную точку (либо: прямую b и точку B, либо прямую c и точку C). Построим же через точку A прямую, параллельную стороне BC (или прямой a). Получим фигуру, данную на чер. 44, где $MN \parallel BC$. Назовем внутренние углы $\triangle ABC$ нумерами 1, 2, 3 и занумеруем еще нумерами 4, 5 и 6 некоторые углы при точке A, полученные после построения прямой MN (см. чер. 44). Мы видим, что при точке A выполнено сложение нескольких углов. Например, мы видим, что



Чер. 43.



Чер. 44.

$$\angle 1 + \angle 4 + \angle 5,$$

причем сумма равна выпрям. углу BAD, т.-е..

$$\angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = \text{выпр. углу.}$$

Но $\angle 4 = \angle 3$, так как это внутренние накрест-лежащие углы при параллельных BC и MN и секущей AC; также $\angle 5 = \angle 2$.

как соответственные углы при параллельных BC и AM и секущей BD. Поэтому в предыдущем равенстве мы можем заменить $\angle 4$ и $\angle 5$ углами 3-м и 2-м; тогда получим

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 = \text{выпр. углу},$$

т.-е. оказывается, что во всяком треугольнике сумма внутренних углов (если их сложить) равна выпрямленному углу.

К тому же результату мы придем, если обратим внимание, что при точке A выполнено сложение $\angle 6$, $\angle 1$ и $\angle 4$, причем сумма равна выпрям. углу NAM. Здесь, следовательно, мы видим:

$$\angle 6 + \angle 1 + \angle 4 = \text{выпр. углу}.$$

Но мы знаем, что $\angle 6 = \angle 2$, как внутр. накр.-леж. при параллельных BC и NM и секущей BD и $\angle 4 = \angle 3$, как внутр. накр.-леж. при тех же параллельных и секущей CA. Поэтому заключаем, что

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = \text{выпр. углу}.$$

Обратим еще внимание на $\angle CAD$, являющийся внешним для $\triangle ABC$. Мы видим, что лучем AM он разбит на 2 слагаемых, на $\angle 4$ и $\angle 5$, т.-е.

$$\angle CAD = \angle 4 + \angle 5.$$

Но, как мы уже выяснили, $\angle 4 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 2$; следов.,

$$\angle CAD = \angle 3 + \angle 2.$$

Эти 2 угла ($\angle 3$ и $\angle 2$) являются внутренними углами $\triangle ABC$, не смежными с $\angle CAD$ (с $\angle CAD$ смежен $\angle 1$). Поэтому мы заключаем:

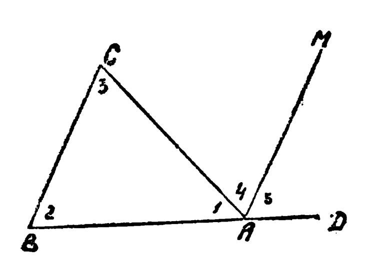
Внешний угол треугольника (образованный одною его стороною и продолжением другой) равен сумме двух внутренних углов с ним не смежных.

Мы можем из чертежа 44 выделить только те элементы, которые необходимы для выяснения полученных свойств, и удалить все остальное, не нужное, тогда получим упрощенный чер-

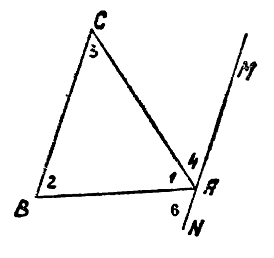
теж. На чертежах 45 и 46 даны 2 таких упрощенных чертежа. Для чер. 45 имеем:

1) $\angle 1 + \angle 4 + \angle 5 =$ выпр. углу, но $\angle 4 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 2$; след., $\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 =$ выпр. углу.

2) $\angle CAD = \angle 4 + \angle 5$, но $\angle 4 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 2$. Следов., $\angle CAD = \angle 3 + \angle 2$.



Чер. 45.



Чер. 46.

Для чер. 46 имеем: $\angle 6 + \angle 1 + \angle 4 =$ выпр. углу, но $\angle 6 = \angle 2$ и $\angle 4 = \angle 3$, следов., $\angle 2 + \angle 6 + \angle 3 =$ выпр. углу.

38. Задача. Построить $\triangle$ с такими же сторонами, как у данного треугольника.

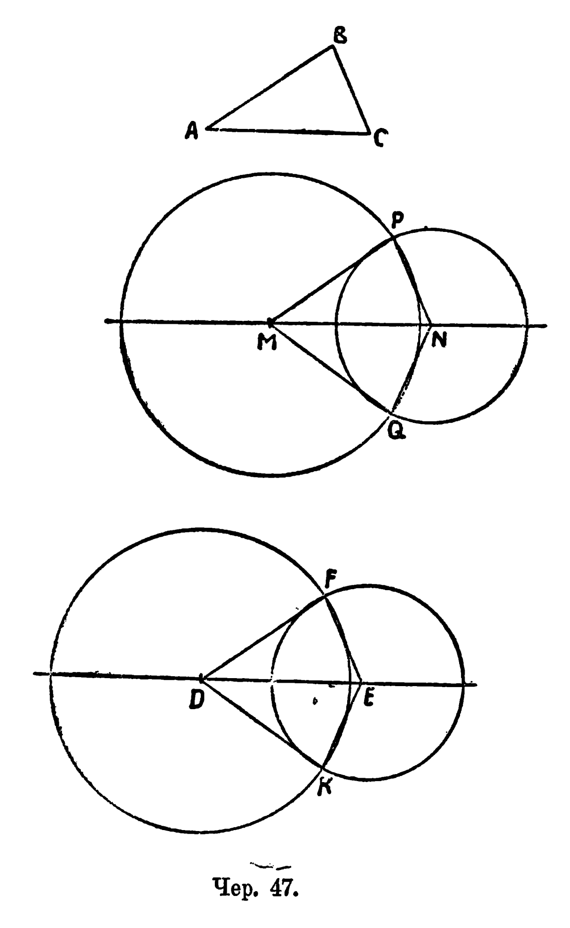
Пусть дан $\triangle ABC$ (чер. 47). Строим где-либо прямую и на ней при помощи циркуля откладываем отрезок $MN = AC$. Таким образом мы получим две вершины искомого треугольника M и N Чтобы найти третью вершину, воспользуемся задачею n° 27: надо найти такую точку, чтобы отрезок, соединяющий ее с точкой M, был равен AB и отрезок, соединяющий ее с точкою N, был $= CB$, для чего, принимая последовательно M и N за центры, строим 2 круга: один радиусом $= AB$ и другой радиусом $= CB$. Эти круги пересекутся в двух точках P и Q; соединив эти точки прямыми с M и N, получим два искомых треугольника: один $\triangle MPN$ и другой $\triangle MQN$ ($MN = AC$; $MP = MQ = AB$; $NP = NQ = CB$). Примем, что *два круга не могут пересекаться более, чем в двух точках*[1]. Согласно n° 26 точки пересечения наших кругов P и Q расположены симметрично относительно линии центров MN. Поэтому при перегибании всей

---

[1]) Впоследствии этот вопрос будет разъяснен (см. n° 128).

фигуры по оси симметрии MN точка P должна совместиться с точкою Q, а, следовательно, $\triangle MPN$ совместится с $\triangle MQN$. Согласно n° 2, мы можем назвать эти треугольники равными или конгруэнтными.

Если мы повторим где-либо на ином месте плоскости предыдущее построение, то получим еще 2 треугольника DEF и DEK



Чер. 47.

с такими же сторонами, как у $\triangle ABC$ ($DE = AC$; $DF = DK = AB$, $EF = EK = CB$). Также в силу того, что прямая DE есть ось симметрии всей фигуры, мы заключим, что эти два треугольника равны или конгруэнтны между собою. Возникает теперь

вопрос: можно ли добиться того, чтобы какой-либо из треугольников второй пары (напр., $\triangle DEF$) совпал с каким-либо треугольником первой пары (напр., с $\triangle MPN$)?

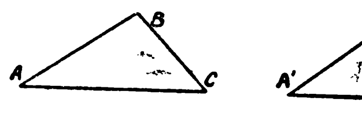
Круги позволят решить этот вопрос. Передвинем нижнюю фигуру чертежа 47 так, чтобы точка D совпала с точкой M и точка E с точкой N (этого добиться можно потому, что $MN = DE$, — каждый из этих отрезков $= AC$). Тогда круги фигуры $DEFK$ совпадут соотв. с кругами фигуры $MPNQ$ (ибо радиусы этих кругов соотв. равны между собою и центры их совместились). Поэтому и точки пересечения этих двух пар кругов должны совместиться, т.-е., напр., точка F совместится с точкою P и точка K с Q. Отсюда заключаем, что и $\triangle DEF$ должен совместиться с $\triangle MNP$, что принято записывать в виде $\triangle DEF = \triangle MNP$. Мы также могли бы к $\triangle ABC$ пристроить два круга, принимая точки A и C за центры и отрезки AB и CB за радиусы, и также при помощи этих кругов пришли бы к заключению, что

$$\triangle ABC = \triangle MPN = \triangle MQN = \triangle DFE = \triangle DKE.$$

Итак, если построить два треугольника с попарно равными сторонами, то эти треугольники конгруэнтны (или равны).

(Следует помнить, что для геометрических фигур слова „конгруэнтны" или „равны" означают, что эти фигуры совпадают при наложении).

39. В предыдущем n° мы научились строить равные треугольники. Пусть $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$ (чер. 48) и при наложении сторона $A'B'$ совпадает с AB, $B'C'$ — с BC и $A'C'$ — с AC. Тогда и углы этих треугольников совпадают, а именно $\angle C'$ с $\angle C$, $\angle A'$ с $\angle A$ и $\angle B'$ с $\angle B$, т.-е. $\angle C' = \angle C$, $\angle A' = \angle A$ и $\angle B' = \angle B$. Ясно, что в равных треугольниках равные углы лежат против равных сторон и обратно: равные стороны против равных углов.

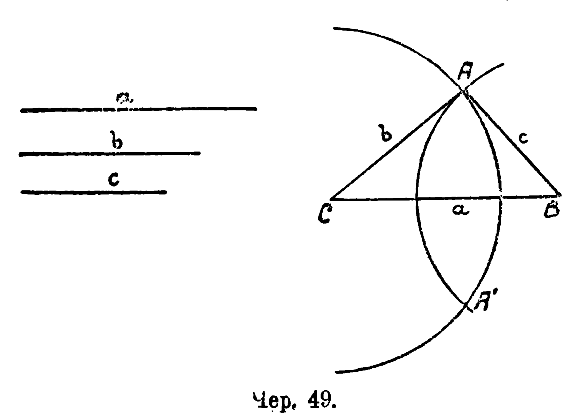


Чер. 48.

40. Задача. Построить треугольник по трем данным сторонам.

Пусть даны три отрезка a, b и c (чер. 49); требуется построить $\triangle$ так, чтобы его стороны были соответственно равны данным отрезкам.

Строим где-либо один из данных отрезков a; тогда определятся две вершины треугольника B и C. Третья вершина должна расположиться так, чтобы отрезок, соединяющий ее с точкою B, был $= c$ и отрезок, соединяющий ее с точкою C, был $= b$; по-



Чер. 49.

этому нахождение ее сведется к задаче n° 27: надо, принимая B за центр, построить круг радиусом $= c$, и, принимая C за центр, — круг радиусом $= b$ и точку пересечения этих кругов, напр., точку A, соединить с точками B и C — тогда $\triangle ABC$ и есть искомый. Соединив другую точку пересечения окружностей A' с точками B и C, получим другой такой же $\triangle$, расположенный симметрично с первым относительно оси BC.

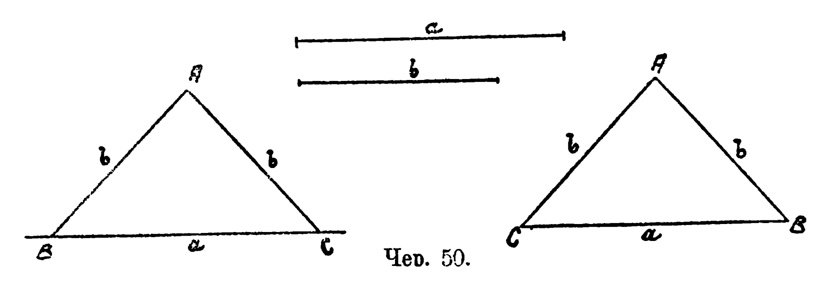
Для того, чтобы задача была возможна, надо, чтобы: 1) $a - b < c$ или $c > a - b$ и 2) $a + b > c$ или $c < a + b$, т.-е., чтобы один из данных отрезков был больше разности двух других и меньше их суммы.

41. Пусть теперь даны 2 отрезка a и b (чер. 50). Требуется построить $\triangle$ так, чтобы его стороны были a, b и b (задача возможна, если $a < b + b$ или $a < 2b$).

Согласно предыдущему n°, построение легко выполняется и получим, напр., $\triangle ABC$, у которого две стороны (AB и AC) равны между собою. Такой $\triangle$ называется **равнобедренным**; та его сторона, которая не имеет себе равных (в $\triangle ABC$ сторона $BC = a$), называется **основанием** равнобедр. $\triangle$-а, а

противоположная вершина A называется „вершиною равнобедренного треугольника“, причем этим названием эта *вершина* A как бы выделяется из остальных вершин.

Вообразим, что $\triangle ABC$ перевернут другою стороною, то новый $\triangle ACB$ (чер. 50 — справа) можно простым передвижением совместить с прежним: сторона BC левого треуг-ка $=$ стороне CB правого, сторона AB левого $=$ стороне AC правого и сторона AC левого $=$ стороне AB правого, а мы уже знаем, что

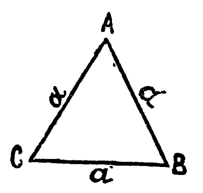


Чер. 50.

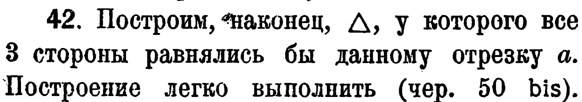
если стороны двух треугольников попарно равны, то эти треугольники равны, т.-е. при наложении совмещаются (n° 38) и $\angle B$ левого $\triangle$-а равен, следов., углу C правого, или, что то же самое, углу C тоже левого треуг-ка. Итак, в равнобедр. $\triangle ABC$, у которого $AB = AC$, $\angle B$ также $= \angle C$. Это свойство выразим словами:

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны
или

В треугольнике, у которого две стороны равны, против равных сторон лежат равные углы.



Чер. 50 bis.

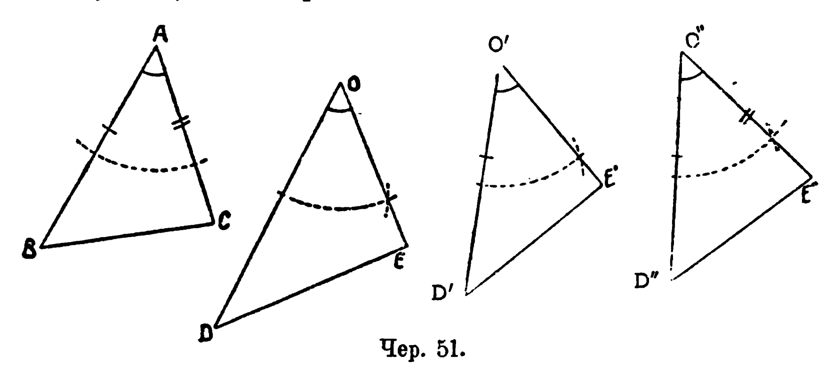


42. Построим, наконец, $\triangle$, у которого все 3 стороны равнялись бы данному отрезку a. Построение легко выполнить (чер. 50 bis). Этот $\triangle$ наз. *равносторонним*. Легко видеть, что этот $\triangle$ можно счесть за равнобедренный с основанием CB; тогда $\angle C = \angle B$. Но его можно принять и за равнобедренный с основанием AB и тогда $\angle A = \angle B$, откуда приходим к заключению, что *в равностороннем треугольнике все 3 угла равны между собою*.

43. В n°38 мы получили *признак* равенства треугольников: если стороны двух треуг-ков попарно равны, то и треуг-ки равны.

Теперь мы можем, накладывая один треуг-к на другой, получить еще другие признаки.

Построим какой угодно $\triangle ABC$ (чер. 51); затем построим $\angle O = \angle A$ (n°28) и на сторонах этого угла отложим отрезки $OD > AB$ и $OE < AC$[1]). Соединив точки D и E, получим $\triangle ODE$. Наложим $\triangle ODE$ на $\triangle ABC$ так, чтобы $\angle O$ совпал с $\angle A$ (ведь $\angle O = \angle A$). В силу неравенств $OD > AB$ и $OE < AC$, $\triangle ODE$ при этом наложении не совместится с $\triangle ABC$ (следует нарисовать, как именно расположится $\triangle ODE$ при этом наложении). Построим еще $\triangle O'D'E'$ так, чтобы 1) $\angle O' = \angle A$, 2) $O'D' = AB$ и 3) $O'E' < AC$. Тогда при наложении треугольника $O'D'E'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы $\angle O'$ совместился с $\angle A$, легко уясним, что и вершина D' должна также совместиться с



Чер. 51.

точкою B (в силу равенства $O'D' = AB$), но точка E' не совпадет с точкою C, — треугольники опять не совместятся (нарисовать их расположение при указанном наложении!). Теперь легко ответить на вопрос: как надо изменить сторону $O'E'$ треугольника $O'D'E'$, чтобы быть убежденным, что этот $\triangle$ совместится с $\triangle ABC$?

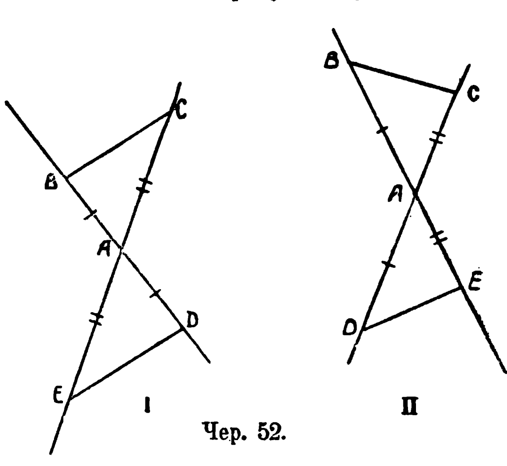
Надо, ответим мы, увеличить сторону $O'E'$ так, чтобы она сделалась равною стороне AC.

Итак, если мы построим $\triangle O''D''E''$ так, чтобы 1) $\angle O'' = \angle A$, 2) $O''D'' = AB$ и 3) $O''E'' = AC$, то мы можем быть убеждены, что $\triangle O''D''E'' = \triangle ABC$. Замечая, что $\angle O''$ и $\angle A$ составлены попарно равными сторонами (на чертеже равные стороны и равные углы отмечены одинаковыми значками), мы можем сделать заключение:

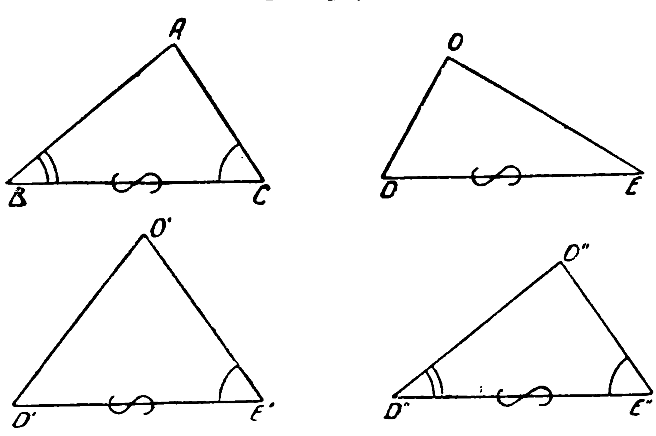
[1]) На чер. 51 даны пунктиром те дуги, которые необходимы для построения $\angle O = \angle A$.

Если построены два треугольника так, что у них по две равных стороны и углы, составляемые этими сторонами, также равны, то эти треуг-ки равны.

44. Построим два вертикальных угла при точке A — они, мы знаем, равны (чер. 52) и на сторонах этих углов отложим попарно равные отрезки $AB=AD$ и $AC=AE$ (это можно сделать двумя способами, почему на чер. 52 даны две фигуры I и II). Равны ли полученные треугольники? Как надо переместить $\triangle AED$, чтобы он совпал с $\triangle ABC$? Указать, какой угол одного из каждой пары треугольников равен какому-либо



Чер. 52.



Чер. 53.

углу другого (можно воспользоваться n°39 или выяснить, как именно расположится $\triangle AED$ при совмещении его с $\triangle ABC$).

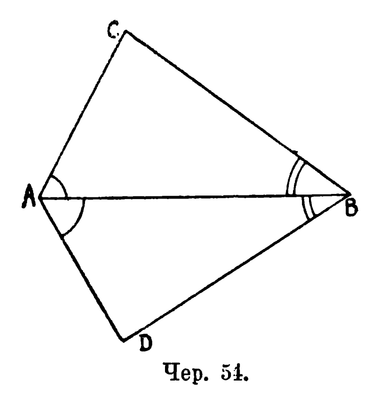
45. Построим какой-либо $\triangle ABC$ (чер. 53); затем построим $\triangle ODE$ так, чтобы сторона DE = стороне BC, чтобы $\angle D$ был больше $\angle B$, но $\angle E$ был меньше $\angle C$. Наложим $\triangle ODE$ на

$\triangle ABC$ так, чтобы DE совпала с BC (точка D с B и точка E с C); этого добиться можно, так как эти стороны равны по построению.

Тогда, в силу того, что $\angle D > \angle B$ и $\angle E < \angle C$, $\triangle ODE$ не совместится с $\triangle ABC$ (следует нарисовать, как именно при этом наложении расположится $\triangle ODE$). Построим еще $\triangle O'D'E'$ так, чтобы $D'E' = BC$, а также $\angle E' = \angle C$, но, попрежнему, $\angle D'$ был больше $\angle B$. Тогда при наложении $\triangle O'D'E'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы точки D' и E' совпали соответственно с точками B и C, увидим, что сторона $E'O'$ пойдет по стороне CA (ведь теперь $\angle E' = \angle C$), но сторона $D'O'$ пойдет вне угла B ($\angle D' > \angle B$) и точка O' не совпадет с точкою A (следует нарисовать расположение этих треугольников при рассматриваемом наложении). $\triangle O'D'E'$ опять не совместится с $\triangle ABC$.

Теперь не трудно ответить на вопрос: как надо изменить $\angle D'$, чтобы добиться совпадения $\triangle O'D'E'$ с $\triangle ABC$? Надо, ответим мы, уменьшить $\angle D'$ так, чтобы он сделался равен $\angle B$.

Итак, если мы построим $\triangle O''D''E''$ так, чтобы 1) $D''E'' = BC$, 2) $\angle E'' = \angle C$ и 3) $\angle D'' = \angle B$, то мы можем быть убеждены, что $\triangle O''E''D'' = \triangle ABC$. Замечая, что равные стороны $D''E''$ и BC этих треугольников расположены между соответственно равными углами (на чертеже равные стороны и равные углы отмечены одинаковыми знаками), мы можем установить еще признак равенства треугольников:



Чер. 54.

Если построены 2 треугольника так, что они имеют по два равных угла и по равной стороне между этими углами, то такие треугольники равны.

46. Построим какой-либо $\triangle ABC$ (чер. 54) и при концах стороны AB построим $\angle BAD = \angle CAB$ и $\angle ABD = \angle ABC$. Тогда получим $\triangle ABD$.

Равны ли треугольники ACB и ABD? Как можно добиться совмещения этих треугольников? Указать равные стороны в этих треуг-ках (можно воспользоваться n°39).

47. Имея в виду nn°38, 43 и 45, мы можем теперь свести вместе признаки равенства треугольников:

1) Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого, то эти треугольники равны.

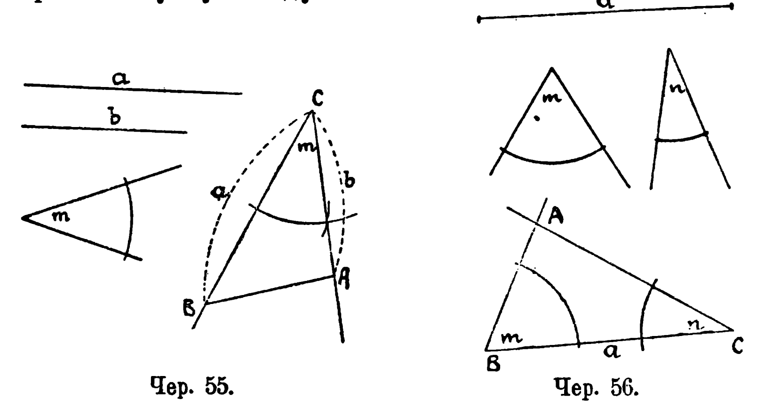
2) Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого, то эти треугольники равны.

3) Если два угла и сторона между ними одного треугольника равны соответственно двум углам и стороне между ними другого, то эти треугольники равны.

Прибавим сюда еще заключение n°39: в равных треугольниках равные углы расположены против равных сторон и равные стороны против равных углов.

Для совмещения равных треугольников иногда бывает необходимо один из них перевернуть другою стороною.

48. Задача. Построить треугольник по двум данным сторонам и углу между ними.



Чер. 55. Чер. 56.

Пусть даны 2 отрезка a и b и угол m (чер. 55). Требуется построить $\triangle$ так, чтобы данные отрезки были его сторонами и угол, ими составляемый, был $= \angle m$.

Строим: 1) при точке C угол, равный $\angle m$, 2) на сторонах построенного угла откладываем $CB = a$ и $CA = b$, 3) соединяем точки A и B. Получим искомый $\triangle ABC$.

49. Задача. Построить треугольник по данной стороне и двум прилегающим к ней углам.

Дан отрезок a и 2 угла m и n (чер. 56); требуется построить $\triangle$ так, чтобы одна из его сторон $= a$ и углы, к ней прилегающие, были равны $\angle m$ и $\angle n$.

Строим: 1) отрезок $BC = a$, 2) при точке B угол $= \angle m$ и при точке C угол $= \angle n$ так, чтобы одна сторона каждого из этих углов шла по BC; точка пересечения A других сторон построенных углов даст вершину A искомого треугольника.

Может случиться, что стороны построенных углов или вовсе не пересекаются (параллельны между собою—это случится, если $\angle m + \angle n =$ выпр. углу) или пересекутся по другой стороне от BC; в последнем случае получится $\triangle$, у которого к стороне a прилегают углы не m и не n, а дополняющие их до выпрямленного.

Мы знаем, что сумма всех трех внутренних углов треугольника равна выпрямленному углу, а сумма двух внутренних его углов должна быть, следовательно, меньше выпрямленного. Поэтому для возможности данной задачи необходимо, чтобы было: $\angle m + \angle n <$ выпрямленного угла.

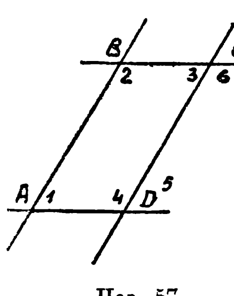
Упражнения. 1. Построить равнобедренный треугольник по углу при его вершине и по боковой стороне.

2. Построить равнобедренный треугольник по основанию и по углу при основании.

ГЛАВА V.

Параллелограмм и его частные виды.

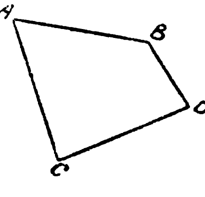
50. Построим две пары параллельных прямых: $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ (чер. 57). Совокупность этих четырех прямых с их четырьмя точками пересечения составляют фигуру, называемую **параллелограммом**. На чер. 57 имеем параллелограмм $ABCD$. Прямые, его составляющие, называются **сторонами** параллелограмма; иногда под этим названием понимают не всю бесконечную прямую AB, а только ее отрезок между точками A и B. Точки пересечения сторон называются **вершинами** параллелограмма. Параллелограмм выделяет из плоскости определенную ее часть, называемую его **площадью**. Параллелограмм имеет 4 внутренних угла; поэтому иногда дают определение параллелограмма в следующей форме:



Чер. 57.

Параллелограммом называется четыреугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

Параллелограмм является, следовательно, частным видом общего понятия „четыреугольник"; мы легко можем построить вообще какой-нибудь четыреугольник, выделяющий из плоскости определенную ее часть: для этого надо построить какой-нибудь отрезок AB (чер. 58), из точки A построить какой-либо новый отрезок AC, составляющий с AB некоторый угол, отличный от выпрямленного, из точки C также построить новый отрезок CD, чтобы точка D лежала по ту же сторону прямой AC (бесконечной), как и точка B, и, наконец, построить отрезок BD, концами которого служат уже построенные точки B и D. То же можно выполнить иначе: взять 4 произвольных точки A, B, D и C и соединить их попарно прямыми, каждую с двумя соседними, наблюдая лишь, чтобы эти прямые выделяли из плоскости определенную часть.



Чер. 58.

О четыреугольниках и вообще о многоугольниках смотри гл. VII.

51. **Изучение углов параллелограмма.** Пронумеруем внутренние углы цифрами 1, 2, 3 и 4 и возьмем еще два из внешних углов: $\angle 5$ и $\angle 6$ (чер. 57). Тогда:

1) $\angle 1 + \angle 4 =$ выпрямл. углу; 2) $\angle 1 + \angle 2 =$ выпрямл. углу и т. д.

В самом деле, углы 1 и 4 суть внутренние односторонние при параллельных AB и DC и секущей AD, а мы знаем (n° **33**), что сумма таких углов равна выпрямленному; то же применимо и к углам 1 и 2, которые являются внутренними односторонними при параллельных AD и BC и секущей AB. Можно то же применить и к парам углов 2 и 3 или к 3 и 4.

2) $$\angle 1 = \angle 3 \text{ и } \angle 2 = \angle 4.$$

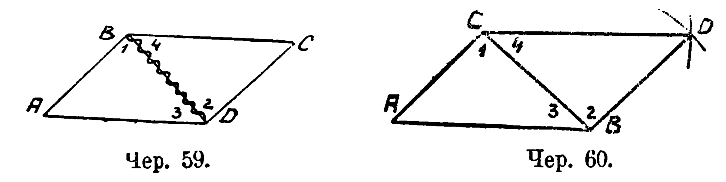
Так как $\angle 1 = \angle 5$, как соответственные при параллельных AB и DC и секущей AD, но $\angle 5 = \angle 3$, как внутренние накрест-лежащие углы при параллельных AD и BC и секущей CD, то $\angle 1 = \angle 3$; также найдем: $\angle 4 = \angle 6$ и $\angle 6 = \angle 2$, следов., $\angle 4 = \angle 2$.

Эти результаты можно выразить словами:

В параллелограмме: 1) два соседних угла в сумме составляют выпрямленный угол и 2) два противоположных угла равны между собою.

52. Изучение сторон параллелограмма. Здесь мы будем рассматривать стороны, как отрезки, а потому изобразим параллелограмм так, как на чер. 59.

Точки A, B, C и D (чер. 57), кроме сторон, определяют еще прямые AC и BD (на чер. 57 они не начерчены), называемые диагоналями параллелограмма. Построив только одну из них BD (чер. 59), получим два треугольника: $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, у которых одна сторона BD общая. Кроме того, пронумеровав углы, составляемые диагональю BD со сторонами параллелограмма, как на чертеже, найдем $\angle 1 = \angle 2$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных AB и DC и секущей BD, затем $\angle 3 = \angle 4$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных AD и BC и секущей BD. Следовательно, два угла ($\angle 1$ и $\angle 3$) и сторона между ними BD одного треугольника ($\triangle ABD$) соответственно равны двум углам ($\angle 2$ и $\angle 4$) и стороне между ними (DB) другого треугольника ($\triangle CDB$), поэтому (n° 47) и $\triangle ABD = \triangle CDB$. Отсюда заключаем, что и



Чер. 59. Чер. 60.

их остальные части равны, причем равные стороны должны лежать против равных углов: AD (против $\angle 1$ в $\triangle ABD$) должна, следовательно, равняться BC (против $\angle 2$ в $\triangle CDB$) и также AB (против $\angle 3$) равняется DC (против $\angle 4$). Этот результат можно выразить словами:

Параллельные стороны параллелограмма равны между собою.

53. В упражнениях 3 и 4 n° 34 мы уже строили параллелограмм. Но построение параллельных прямых несколько длинно. Теперь является возможным ускорить построение параллелограмма. Возьмем произвольный угол A (чер. 60) и на сторонах

его отложим два произвольных отрезка AB и AC; затем, принимая B за центр, построим окружность радиусом, равным отрезку AC, и, принимая C за центр, построим другую окружность, радиусом, равным отрезку AB. Наконец, одну из точек пересечения этих окружностей, ту именно, которая лежит внутри взятого угла A, соединим прямыми DC и DB с точками C и B. На нашем чертеже даны только дуги этих кругов, которых достаточно для определения положения точки D; на практике так всегда и поступают. Тогда получим четыреугольник $DBAC$, выделяющий из плоскости ее определенную часть; согласно построению, 1) $BD = AC$ и 2) $AB = CD$. Возникает вопрос: построен ли у нас параллелограмм, или нет?

Для решения этого вопроса построим диагональ CB; тогда получим 2 треугольника: ACB и DBC, у которых сторона CB общая и, согласно построению, $AC = BD$ и $AB = CD$, т.-е. 3 стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого, а такие треугольники, мы знаем (n° 46), равны, т.-е. $\triangle ACB = \triangle CBD$. Отсюда заключаем о равенстве углов 1 и 2 (против равных сторон); следов., $AC \parallel BD$, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ суть внутренние накрест-лежащие при прямых AC и BD и секущей CB. Также заключаем, что $\angle 3 = \angle 4$, и, следов., $AB \parallel CD$, так как $\angle 3$ и $\angle 4$ суть внутренние накрест-лежащие углы при прямых AB и CD и секущей CB. Отсюда следует, что $ACDB$ есть параллелограмм, т.-е.:

Если построен 4-угольник, выделяющий из плоскости определенную часть, у которого противоположные стороны равны, то этот 4-угольник есть параллелограмм.

54. Упражнения. Надо освоиться с выше данным построением параллелограмма и выполнять это построение быстро и свободно.

1. На данном угле построить параллелограмм. Много ли таких параллелограммов возможно построить?

2. Построить параллелограмм на данной стороне. Много ли возможно построить таких параллелограммов?

3. Построить параллелограмм по данной стороне и по углу. Много ли таких параллелограммов можно построить?

4. Построить параллелограмм по двум сторонам. Много ли таких параллелограммов можно построить?

5. Построить параллелограмм по двум сторонам и углу между ними.

6. Построить параллелограмм на данной диагонали. Много ли воз можно построить таких параллелограммов?

7. Построить параллелограмм, если даны три его вершины. Сколько можно построить таких параллелограммов?

После решения этой задачи получим фигуру, изучение которой позволит установить некоторые свойства треугольника:

a) прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне и равна ее половине;

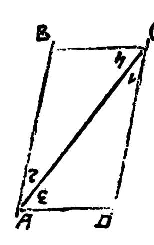
b) если дан какой-либо треугольник, то можно построить другой треугольник, чтобы каждая сторона нового была в 2 раза больше (или, наоборот, в 2 раза меньше) соответствующей стороны старого треугольника, причем площадь нового треугольника окажется в 4 раза больше (или, наоборот, — меньше) площади старого.

(На стран. 99 дана фигура, которую можно получить здесь, решая предложенную задачу; в п. 107, на той же странице, дано изучение этой фигуры, однако, с несколько иной точки зрения).

8. Построить параллелограмм по двум сторонам и диагонали.

Полезно, прежде чем приступить к построениям, требуемым в вышеизложенных задачах, дать себе отчет, какие из 4 вершин параллелограмма даны, и наметить мысленно заранее приблизительное положение остальных вершин.

55. Можно еще построить параллелограмм следующим образом: построим две параллельных прямых $AB \parallel DC$ (чер. **61**) и на каждой из них отложим по равному отрезку $AB = DC$. Затем соединим точки A и D и точки B и C (но нельзя соединять A с C и B с D,— тогда получится 4-угольник, не выделяющий из плоскости определенную ее часть); тогда получим 4-угольник $ABCD$, у которого $AB \# DC$ (равна и параллельна), выделяющий из плоскости определенную ее часть.



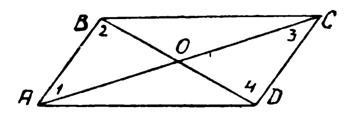
Чер. 61.

Не трудно выяснить, что построенный 4-угольник есть параллелограмм. Для этого построим диагональ AC и пронумеруем полученные при концах диагонали углы. Легко видеть, что $\triangle ABC = \triangle CDA$; в самом деле, у них сторона AC общая, затем по построению $AB = CD$ и, кроме того, $\angle 1 = \angle 2$, так как $AB \parallel CD$, т.-е. 2 стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого, а мы знаем (n° **47**), что в этом случае треугольники равны. Отсюда заключаем, что $\angle 3 = \angle 4$, а так как эти углы суть внутренние накрест-лежащие при прямых CB и AD и се-

кущей CA, то $CB \parallel AD$; кроме того, из равенства же треугольников имеем $CB = AD$. Теперь выяснено, что $ABCD$ есть параллелограмм. Этот результат можно выразить словами:

Если в 4-угольнике, выделяющем из плоскости определенную ее часть, две стороны равны и параллельны, то и другие две равны и параллельны, и этот 4-угольник есть параллелограмм.

56. Изучение диагоналей параллелограмма. Уже было замечено, что в параллелограмме возможно построить две диагонали. Пусть построен параллелограмм $ABCD$ (чер. 62) и его диагонали AC и BD. Мы уже знаем, что противоположные стороны параллелограмма равны, т.-е. $AB = CD$ и $AD = BC$. Воспользуемся этим и найдем равные треугольники.



Чер. 62.

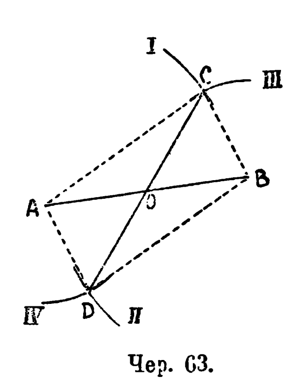
Нетрудно увидать, что $\triangle AOB = \triangle COD$. В самом деле, мы знаем, что $AB = CD$; затем, пронумеровав углы, найдем, что $\angle 1 = \angle 3$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных AB и CD и секущей AC, и также $\angle 2 = \angle 4$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных AB и CD и секущей BD, т.-е. два угла и сторона между ними одного треугольника равны соответственно двум углам и стороне между ними другого, а такие треугольники, как знаем (n° **47**), равны. Также можно найти равенство $\triangle OBC$ и $\triangle ODA$. Из равенства треугольников OAB и OCD следует, что $OA = OC$ (против равных углов 2 и 4) и $BO = OD$ (против равных углов 1 и 3), т.-е. диагонали в точке O разделили друг друга на 2 равных отрезка или пополам. Этот результат можно выразить словами:

Диагонали параллелограмма делят друг друга пополам.

Точка O, в которой AC и BD делятся пополам, называется серединою отрезка AC и серединою отрезка BD.

57. При помощи построения параллелограмма мы можем теперь каждый данный отрезок разделить пополам, или, другими словами, найти середину этого отрезка.

Пусть дан отрезок AB (чер. 63); требуется найти его середину. Примем AB за одну из диагоналей параллелограмма, который и надо построить для решения задачи. Такая задача была уже предложена (зад. 6 n° **54**); дадим здесь ее решение. Прежде всего мы замечаем, что у нас уже имеются две противоположных вершины искомого параллелограмма A и B, — другие две вершины должны лежать где-либо по разные стороны прямой AB. Так как стороны параллелограмма нам не даны, то мы можем взять произвольный отрезок, которому должна равняться каждая из одной пары параллельных сторон параллелограмма, и радиусом, равным этому отрезку, опишем дугу I, принимая за центр точку A, и дугу II, принимая за центр точку B. Также, выбрав произвольный отрезок для другой пары сторон параллелограмма (впрочем, он должен быть больше разности между первым отрезком и диагональю AB и меньше их суммы, — иначе окружности не пересекутся, см. n° 25), мы радиусами, равными этому отрезку, опишем дугу III, принимая B за центр, и дугу IV, принимая A за центр, — точка C, где пересекаются дуги I и III, и точка D, где пересекаются дуги II и IV, должны служить другими двумя вершинами параллелограмма. Соединив их прямыми с точками A и B, получим искомый параллелограмм, диагональю которого служит данный отрезок AB. Ясно, что таких параллелограммов можно построить бесчисленное множество, так как выбор сторон AC и BC зависит от нас.



Чер. 63.

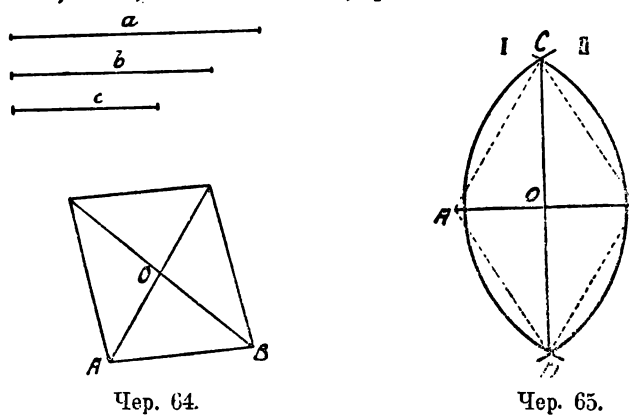
Нам важна вторая диагональ этого построенного параллелограмма, диагональ CD; построив ее, мы, на основании предыдущего n°, можем утверждать, что задача решена, что точка O, где CD пересекается с AB, есть середина AB.

Заметим, что нет надобности строить стороны параллелограмма AC, CB, BD и DA, — нужно лишь построить его вторую диагональ CD.

58. Задача. Построить параллелограмм по его диагоналям и одной стороне.

Пусть даны отрезки *a*, *b* и *c* (чер. 64); требуется построить такой параллелограмм, чтобы отрезки *a* и *b* служили его диагоналями и отрезок *c* одною из его сторон.

Чтобы разобраться в этой задаче, начертим (хотя бы от руки) параллелограмм и будем считать, что его диагонали и одна из сторон (напр., отмеченная на чертеже черточкою) нам известны. Зная свойство диагоналей (n° **56**), мы придем к заключению, что мы можем построить $\triangle AOB$, в котором нам все три стороны известны: AB данная, AO и OB суть половины данных диагоналей. Поэтому построение должно быть выполнено в таком порядке: 1) надо, согласно n° 57, разделить пополам каждую из



Чер. 64. Чер. 65.

данных диагоналей *a* и *b*, 2) построить $\triangle$, у которого сторонами служат найденные половины диагоналей и данная сторона параллелограмма *c* (n° **38**) и 3) дополнить построенный треугольник до параллелограмма, для чего надо продолжить его 2 стороны, которые являются половинами данных диагоналей, отложить на продолжениях опять половины диагоналей и концы этих отрезков соединить с концами стороны *c*.

Иногда данные могут быть таковы, что задача невозможна,— это можно узнать при выполнении 2-го построения.

59. Можно ускорить решение задачи деления данного отрезка пополам, для чего следует описывать дуги из концов данного отрезка не различными, а одинаковыми радиусами.

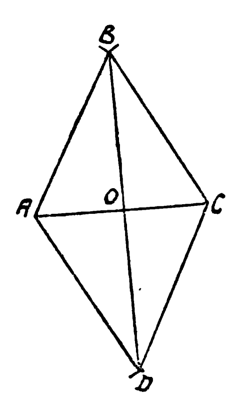
Пусть требуется отрезок AB (чер. 65) разделить пополам; для этого, принимая последовательно точки A и B за центры,

построим две окружности I и II одинаковыми радиусами и их точки пересечения C и D соединим прямою, — точка O, где CD пересекает AB, и явится серединою отрезка AB. Можно, конечно, строить не полные окружности, а лишь их дуги, достаточные для определения положения точек C и D. Для того, чтобы эти окружности пересеклись, необходимо, чтобы их общий радиус был больше половины отрезка AB.

Если построить самый параллелограмм, то увидим, что все его стороны равны между собою: $AC = CB = BD = DA$, так как окружности описывались одинаковыми радиусами. Следовательно, здесь мы построили особый параллелограмм, все стороны которого равны между собою, — такой параллелограмм называется **ромбом**.

Упражнение. Разделить данный отрезок на 4, на 8 и т. д. равных частей.

60. Изучение ромба. Для того, чтобы параллелограмм обратился в ромб, достаточно, чтобы две его соседних стороны были равны. Если, напр., построен параллелограмм $ABCD$ (чер. 66) так, что $AB = BC$, то, на основании свойств сторон параллелограмма, имеем $CD = AB$ и $AD = BC$, откуда следует, что $AB = BC = CD = DA$, т.-е., что этот параллелограмм есть ромб.



Чер. 66.

Упражнения. 1. Строить различные ромбы на данной стороне.

2. Строить различные ромбы на данном угле.

3. Построить ромб по данной его стороне и углу.

4. Строить различные ромбы на данной диагонали.

5. Построить ромб по его стороне и диагонали.

То обстоятельство, что ромб есть особенный параллелограмм (параллелограмм с равными сторонами), дает основание думать, что эта особенность должна отразиться и на других частях ромба. Оказывается, что она отражается на его диагоналях.

Пусть построен ромб $ABCD$ (чер. 66) и его диагонали AC и BD. Тогда прежде всего мы уже знаем, что каждая диагональ делится в точке O попалам, так как ромб есть тоже параллело-

грамм (n°56). Теперь надо воспользоваться особенностью ромба: в ромбе все стороны равны, но мы уже знаем, что в параллелограмме противоположные стороны равны, и мы этим воспользовались в n°56, где нашли, что, благодаря этому, точка O есть середина каждой диагонали; теперь, следовательно, надо обратить внимание на равенство двух соседних сторон, т.-е., напр., на равенство $AB = BC$; возникает мысль: не повлечет ли это равенство за собою следствием равенство двух треугольников, сторонами которых служат AB и BC, т.-е. $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$? Рассмотрим эти треугольники: у них 1) сторона BO общая, 2) $AB = BC$, как стороны ромба, и 3) $AO = OC$, так как точка O есть середина диагонали AC. Мы знаем, что если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого, то такие треугольники равны; следовательно, $\triangle AOB = \triangle OBC$. Отсюда следует: 1) $\angle ABO = \angle OBC$ (эти углы расположены против равных сторон OA и OC) и 2) $\angle AOB = \angle BOC$ (против равных сторон AB и BC). Первое равенство углов указывает, что $\angle ABC$ ромба разделен диагональю BD на два равных угла. Если бы мы рассмотрели треугольники OBC и OCD, то также нашли бы, что $\angle BCD$ ромба делится диагональю CA на два равных угла; то же можно получить и про остальные два угла. Поэтому имеем первое свойство диагоналей ромба:

1) Диагонали ромба делят его углы пополам.

Рассматривая 2-е из найденных равенств, т.-е. равенство $\angle AOB = \angle BOC$, видим, что здесь выпрямленный угол AOC делится также диагональю BD пополам; не трудно также увидать, что все 4 угла при точке O равны между собою, т.-е. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$ (это можно увидать, напр., из того, что $\angle AOD = \angle BOC$, как вертикальные, и по той же причине $\angle COD = \angle BOA$, — следовательно, все 4 угла равны между собою), причем каждый из них получился от разделения на две равных части выпрямленного угла (напр., $\angle COD$ получился от разделения на 2 равных части выпрямленного угла BOD и т. д.). Принято называть углы, получающиеся от разделения выпрямленного угла на две равных части, **прямыми** углами; следовательно, у нас получились прямые углы: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ и $\angle DOA$. Коротко выражают ту же мысль словами: прямым углом называется половина выпрямленного угла.

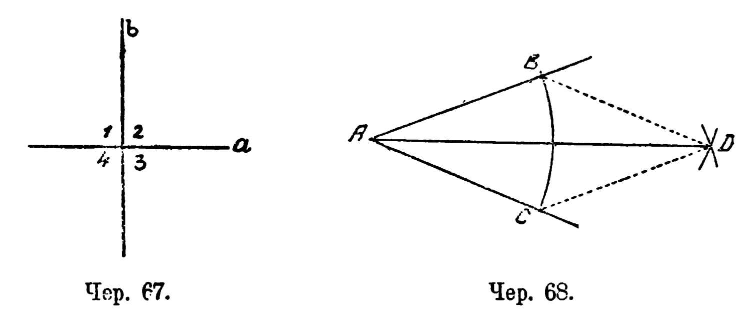
Вот необходимые нам свойства прямых углов:

a) Все прямые углы равны между собою.

Это следует из того, что все выпрямленные углы равны между собою, а, следовательно, и их половины (прямые углы) тоже равны.

b) Если один из четырех углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, прямой, то и остальные три угла прямые.

В самом деле, если при точке пересечения прямых a и b (чер. 67) получились углы 1, 2, 3 и 4, из которых, напр., $\angle 1$ прямой, то и $\angle 2$ прямой, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ вместе составляют



Чер. 67. Чер. 68.

выпрямленный угол, но $\angle 3 = \angle 1$, как вертикальные, следовательно, и $\angle 3$ прямой, так же и $\angle 4$ прямой, потому что он равен $\angle 2$.

Две прямые линии, которые, пересекаясь, образуют прямые углы, называются перпендикулярными прямыми (иногда взаимно-перпендикулярными).

Поэтому второе свойство диагоналей ромба можно выразить в такой форме:

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

61. Пользуясь первым свойством диагоналей ромба, мы можем всякий данный угол разделить пополам.

Пусть дан $\angle A$ (чер. 68); требуется разделить его пополам. Для этого придется построить такой ромб, чтобы $\angle A$ был его углом и построить диагональ этого ромба чрез точку A.

Отложим на сторонах угла A два равных (но произвольных) отрезка $AB = AC$; тогда у нас будут построены 3 вершины ромба A, B и C, четвертая же вершина должна лежать где-то

внутри угла A. Затем, принимая последовательно точки B и C за центры, построим круги (или только их дуги, достаточные для определения четвертой вершины ромба) радиусами, равными отрезкам AB и AC; точка пересечения этих кругов, точка D, расположенная внутри угла A, и дает нам четвертую вершину ромба. Соединив ее с B и C прямыми (впрочем, для деления угла пополам это лишнее, и на первый раз нужно лишь для того, чтобы увидать, что получился ромб), получим ромб $ABDC$; построив его диагональ AD, разделим угол A на два равных угла на $\angle BAD$ и $\angle DAC$.

Луч, делящий угол пополам, называется **биссектором** этого угла; AD есть биссектор угла BAC (чер. 68).

Ясно, что всякий угол может быть вышеописанным способом разделен пополам, или у всякого угла есть биссектор.

Если вообразить, что построенный биссектор AD угла BAC вращается около вершины угла A в ту или другую сторону, то равенство углов BAD и DAC нарушается: один угол увеличивается, а другой уменьшается. Поэтому:

Всякий угол может быть разделен пополам лишь одним способом.

Или:

У всякого угла имеется лишь один биссектор.

62. Упражнения. 1. Построить ромб по его углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла.

Надо построить данный угол, его биссектор, на нем отложить данную диагональ и чрез конец ее построить прямые, параллельные сторонам угла.

2. Построить четыреугольник по его двум противоположным углам и по диагонали, соединяющей вершины этих углов, причем четыреугольник должен быть симметричным относительно данной диагонали.

Как располагается другая диагональ этого четыреугольника относительно данной?

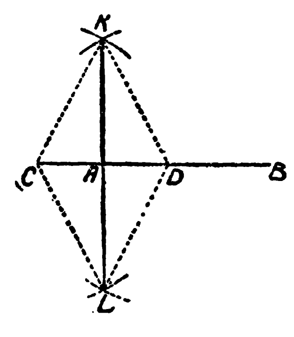
3. Разделить данный угол на 4, на 8 и т. д. равных частей.

4. Построить биссекторы двух смежных углов. Показать, что они перпендикулярны между собою.

63. **Задача.** Построить на данной прямой при данной ее точке прямой угол.

Раз мы умеем строить ромб, то мы умеем, вообще говоря, строить прямые углы, так как диагонали ромба образуют прямые

углы. Для решения задачи этого n° надо расположить ромб так, чтобы точка пересечения его диагоналей совпала с данною точкою *A* (чер. 69) и одна диагональ шла по данной прямой *AB*. Для этого от точки *A* в обе стороны отложим на данной прямой равные (но произвольные) отрезки $AC = AD$; тогда точки *C* и *D* можно принять за две вершины ромба. Для построения двух других вершин надо, принимая последовательно точки *C* и *D* за центры, построить две окружности (или их дуги, достаточные для получения точек пересечения) одним и тем же радиусом, большим, чем отрезок *AC* (иначе окружности не пересекутся). Соединив прямыми точки пересечения наших окружностей *K* и *L* с точками *C* и *D*, получим ромб *CKDL*; его диагональ *KL* должна пройти чрез середину диагонали *CD*, т.-е. чрез точку *A*; построив эту диагональ *KL*, получим 4 прямых угла (n°60).



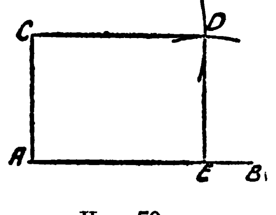
Чер. 69.

Важно ускорить и упростить это построение:

1) Нет надобности строить сторон ромба, 2) можно построить лишь одну точку пересечения окружностей, напр., точку *K*, и тогда, построив отрезок *KA*, получим два прямых угла; если его продолжить, то получим еще два прямых угла. На чертеже изображены пунктиром те линии, построение которых излишне.

64. Задача. Построить параллелограмм с прямым углом.

Строим произвольную прямую *AB* и выбираем на ней произвольную точку *A* (чер. 70), при которой строим (n°63) прямой угол; на стороне *AC* этого прямого угла выбираем произвольную точку *C* и на прямой *AB* точку *E*. Затем, принимая последовательно точки *C* и *E* за центры, строим две окружности (или дуги): первую (центр *C*) радиусом, равным отрезку *AE*, и вторую (центр *E*) радиусом, равным отрезку *AC*; точка пересечения этих окружностей, точка *D*, лежащая по ту же сторону прямой *AB*, как и точка *C*



Чер. 70.

и должна служить четвертою вершиною этого параллелограмма. Построив, наконец, прямые CD и DE, получим искомый параллелограмм $ACDE$, у которого $\angle A$ прямой (сравнить это построение с n°53).

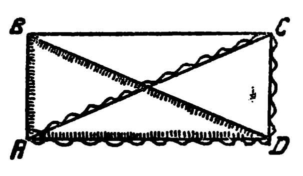
Рассмотрим остальные углы этого параллелограмма: 1) мы знаем, что $\angle D = \angle A$, как противоположные углы параллелограмма (n°51), следовательно, угол D тоже прямой; 2) затем знаем, что $\angle C + \angle A =$ выпрямленному углу, как соседние углы параллелограмма (n°51, 1), но $\angle A$ прямой, т.-е. равен половине выпрямленного угла, следовательно, и $\angle C$ равен половине выпрямленного, т.-е. тоже есть прямой угол, затем $\angle E = \angle C$ и, следовательно, $\angle E$ тоже прямой. Итак, оказалось:

Если в параллелограмме один угол прямой, то и остальные углы прямые.

Такой параллелограмм с прямыми углами называется **прямоугольником**.

65. Так как прямоугольник есть особенный параллелограмм, то эта особенность должна отразиться, как и в ромбе, на его диагоналях.

Пусть построен прямоугольник $ABCD$ (чер. 71) и построены его диагонали AC и BD. Конечно, основное свойство диагоналей параллелограмма остается и здесь: диагонали делят друг друга пополам. Но нам надо открыть какую-либо особенность диагоналей, зависящую от того, что теперь у нашего параллелограмма все углы прямые. Рассмотрим пару треугольников, в каждый из которых входил бы один из прямых углов, и важно, чтобы входили два соседних прямых угла, напр., $\angle A$ и $\angle D$ (соседние углы ведь вообще в параллелограмме не равны, а противоположные всегда равны). Такими треугольниками являются $\triangle ABD$ ($\angle A$ прямой) и $\triangle ACD$ ($\angle D$ прямой). У этих треугольников сторона AD общая, затем сторона AB первого равна стороне CD второго и между ними равные углы, так как мы знаем, что прямые углы равны между собою (n°60, а). Следовательно, две стороны (AD и AB) и угол между ними (прямой $\angle A$) одного треугольника равны соответственно двум сторонам (AD и CD) и

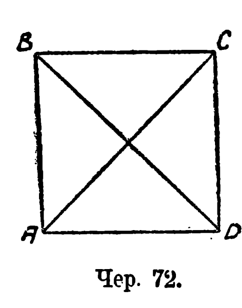


Чер. 71.

углу между ними (прямой $\angle D$) другого треугольника, а мы знаем, что такие треугольники равны. Отсюда выводим, что $AC = BD$, т.-е. оказывается, что диагонали равны между собою. Итак:

Диагонали прямоугольника равны между собою.

66. Наконец, можно построить такой прямоугольник, чтобы у него все стороны были равны (построение ясно: строим прямой угол A (чер. 72) и на его сторонах откладываем равные отрезки $AB = AD$, затем обычным приемом находим четвертую вершину C). Такой параллелограмм является в одно и то же время и прямоугольником (у него все углы прямые, так как один угол прямой) и ромбом (у него все стороны равны, так как две соседних равны), — он называется квадратом. Его диагонали должны обладать свойствами диагоналей и параллелограмма, и ромба, и прямоугольника, т.-е.:



Чер. 72.

Диагонали квадрата взаимно делятся пополам, делят углы квадрата пополам и взаимно перпендикулярны и, наконец, равны между собою.

67. Упражнения. 1. Построить прямоугольник по его сторонам.

2. Построить прямоугольник по диагонали и одной из его сторон.

3. Построить квадрат по его стороне.

4. Построить квадрат по его диагонали.

ГЛАВА VI.

Перпендикулярность прямых. Прямоугольные треугольники.

68. В n°63 мы научились строить прямой угол. Так как две прямые, составляющие прямые углы, называются перпендикулярными друг другу (n°60), то построение n°63 можно выразить словами иначе: мы можем построить прямую, перпендикулярную к данной.

Мы теперь должны эту общую задачу разобрать подробнее и прежде всего разделим ее на две отдельных задачи:

1) Дана прямая и точка на ней, построить чрез данную точку **перпендикуляр** к данной прямой. (Можно ли и сколько?).

2) Дана прямая и точка вне ее; построить чрез данную точку перпендикуляр к данной прямой. (Можно ли и сколько?).

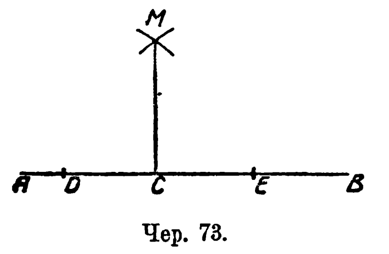
В скобках указаны те вопросы, которые должны быть выяснены при выполнении построений.

69. **1-я задача.** Дана прямая и точка на ней; построить чрез данную точку перпендикуляр к данной прямой.

Здесь остается повторить то построение, какое было дано в n°63.

Пусть дана прямая AB и точка C на ней (чер. 73), построить чрез C перпендикуляр к AB.

От точки C откладываем по AB в разные стороны два произвольных, но равных отрезка $CD = CE$ и затем, принимая последовательно точки D и E за центры, строим две окружности (или две дуги, достаточные для нахождения одной точки пересечения окружностей) одинаковыми радиусами, большими, чем отрезок CD. Точку пересечения M этих окружностей соединяем с C; тогда MC и есть искомый перпендикуляр, так как MC есть половина диагонали ромба, 3 вершины которого суть D, E и M.



Чер. 73.

Слово „перпендикуляр" пишут для сокращения знаком $\perp$; мы построили

$$CM \perp AB$$

(CM перпендикуляр к AB).

Итак, выполнив это построение, мы можем признать, что **чрез всякую точку, данную на прямой, можно построить к ней перпендикуляр** (говорят иногда: восставить перпендикуляр к данной прямой). Остается еще вопрос: сколько?

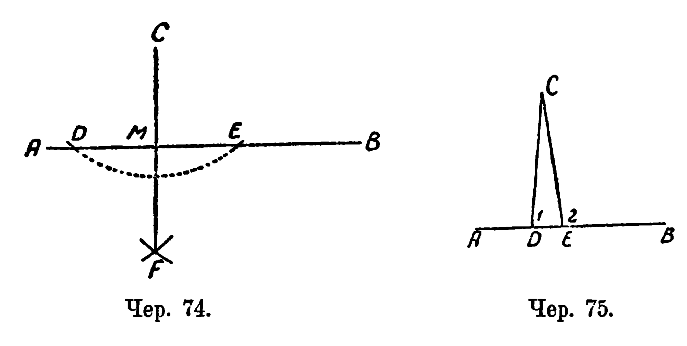
Если луч CM повернуть около точки C в ту или другую сторону, то новые углы, составляемые этим лучом с прямою AB,

уже не будут прямыми; поэтому заключаем, что **возможно построить чрез точку прямой линии к этой прямой лишь один перпендикуляр.**

70. 2-я **задача.** Дана прямая и точка вне ее; построить чрез данную точку перпендикуляр к данной прямой.

Пусть дана прямая AB и точка C вне ее (чер. 74); требуется чрез C построить перпендикуляр к AB.

Задача сводится к построению такого ромба, чтобы его одна вершина расположилась в точке C и одна его диагональ шла по прямой AB. Для построения такого ромба опишем, принимая C за центр, окружность (или дугу), выбрав ее радиус столь большим, чтобы эта окружность пересекалась с прямою AB; пусть она пересечет прямую AB в точках D и E. Тогда будут найдены



Чер. 74. Чер. 75.

еще две вершины ромба. Затем, принимая последовательно за центры точки D и E, построим два круга (или две дуги) тем же самым радиусом и найдем точку их пересечения, расположенную по другую сторону от прямой AB сравнительно с точкою C, пусть эта точка есть F. Тогда все 4 вершины ромба найдены; остается построить его диагональ CF, она, как мы знаем, и будет перпендикулярна к AB, т.-е. $CF \perp AB$ или $CM \perp AB$.

Стороны ромба DC, CE, EF и FD нет надобности строить.

Выполнив указанное построение, мы должны признать, что **из всякой точки, данной вне прямой, мы можем построить перпендикуляр к данной прямой** (говорят иногда: опустить перпендикуляр на данную прямую) Остается еще вопрос: сколько?

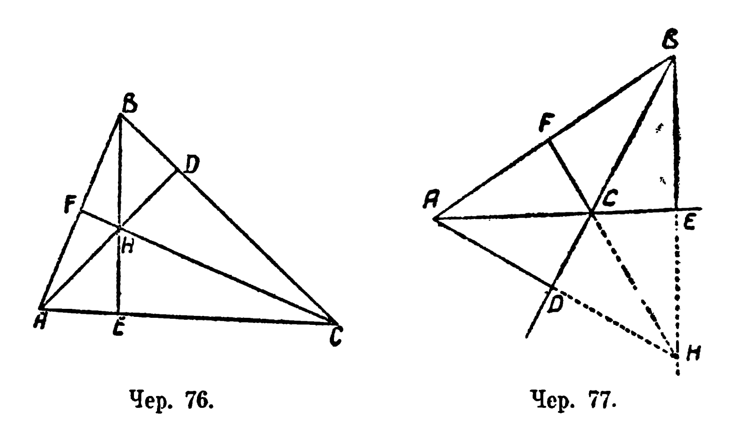
Для решения этого вопроса допустим, что чрез точку C (чер. 75) построено: 1) $CD \perp AB$ и 2) $CE \perp AB$. Тогда $\angle CDF$

или $\angle 1$ и $\angle CEB$ или $\angle 2$ оба должны быть прямыми и, следов., равны между собою. Но $\angle CEB$ есть внешний угол для $\triangle CDE$, а мы знаем (n° **49**), что внешний угол треугольника должен быть больше внутреннего с ним несмежного. Это противоречие показывает, что наше допущение не верно, т.-е. нельзя построить чрез точку C двух перпендикуляров к прямой AB. Итак:

Чрез точку, данную вне прямой, можно построить только один перпендикуляр к этой прямой.

Замечание. Если, как мы получили в этом n°, $CF \perp AB$ (чер. 74), то, очевидно, и $AB \perp CF$.

71. Построим какой-либо $\triangle ABC$ (чер. 76) и из каждой его вершины опустим перпендикуляр на противоположную сторону (здесь под именем сторона треугольника надо понимать бесконечную прямую). Каждый из этих перпендикуляров называется высотою треугольника. Следовательно, наша задача может быть выражена так: построить высоты треугольника. Если мы



Чер. 76. Чер. 77.

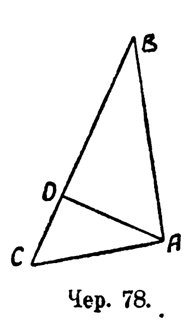
выполним построение перпендикуляров с возможною тщательностью, то в результате увидим, что, повидимому, все три высоты пересекаются в одной точке H, впоследствии мы выясним, что это свойство высот обязательно для всякого треугольника.

При построении высот может быть три случая: 1) все три высоты идут внутри треугольника (чер. 76); 2) две высоты BE и AD располагаются вне треугольника и общая точка H пересечения всех трех высот лежит вне треугольника (чер. 77) и

3) две высоты сливаются со сторонами треугольника (чер. 78), где $BA \perp AC$ и $CA \perp AB$.

72. Для разбора вышеописанных трех случаев расположения высот условимся в обозначениях и названиях.

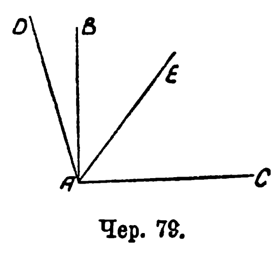
Прямой угол обозначают буквою d; тогда выпрямленный угол равен $2d$, так как прямой угол есть половина выпрямленного угла. Если какой-либо угол больше прямого угла, то он называется тупым углом, а угол, меньший прямого угла, называется острым. Если $\angle BAC$ (чер. 79) прямой, т.-е., если $\angle BAC = d$, то $\angle DAC > d$ и, следов., тупой, а $\angle EAC < d$ и, следов., острый.



Чер. 78.

Мы знаем (n°37), что сумма внутренних углов треугольника равна выпрямленному углу; теперь мы то же можем выразить, сказав, что сумма внутренних углов треугольника $= 2d$ (или двум прямым углам).

Ясно, что 3-й случай расположения высот в треугольнике, когда две его высоты сливаются со сторонами (чер. 78), имеет место, если $\angle BAC$ треугольника прямой ($\angle BAC = d$); такой треугольник с прямым углом называется прямоугольным. Так как сумма всех углов треугольника $= 2d$, а в этом случае $\angle A$ прямой, или $= d$, то два другие угла ($\angle B$ и $\angle C$) в сумме составляют тоже прямой угол, а следовательно каждый из них в отдельности меньше прямого, или, другими словами, каждый из них острый угол.



Чер. 79.

Нетрудно теперь различить и два остальных случая: случай, данный на чер. 76, имеет место тогда, когда все 3 угла в треугольнике острые, а случай, данный на чер. 77, имеет место тогда, когда один из внутренних углов (на чер. 77 $\angle BCA$) тупой.

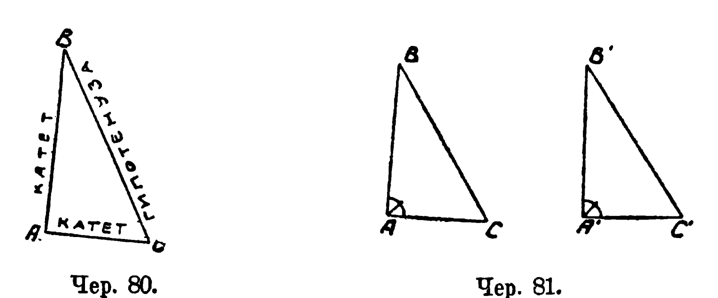
Ясно также, что если в треугольнике один угол тупой (или $> d$), то сумма двух других углов должна быть $< d$, чтобы сумма всех трех углов была $= 2d$, а следовательно каждый из остальных двух углов должен быть острым.

73. Построим какой-либо прямоугольный треугольник ABC (чер. 80), и пусть $\angle A = d$. Тогда сторона BC этого треугольника, лежащая против прямого угла, носит название гипотенуза, а остальные две стороны AB и AC (составляющие прямой угол) называются катетами.

74. Признаки равенства, найденные нами для треугольников вообще, упрощаются для прямоугольных треугольников. Кроме того, для прямоугольных треугольников можно составить еще 2 особых признака. Тогда будем иметь:

1-й признак. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого, то эти прямоугольные треугольники равны.

В самом деле это тот же самый признак, знакомый нам: если 2 стороны и угол между ними одного треугольника равны соот-



Чер. 80. Чер. 81.

ветственно двум сторонам и углу между ними другого, то треугольники равны. Теперь про углы не говорится потому, что между катетами расположены прямые углы, а они всегда равны (на чер. 81). $\angle A = \angle A'$, как прямые, и достаточно для равенства $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ знать, что $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$).

2-й признак. Если катет и прилежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого, то эти прямоугольные треугольники равны.

Это опять-таки знакомый нам признак: если 2 угла и сторона между ними одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне между ними другого треугольника, то эти тре-

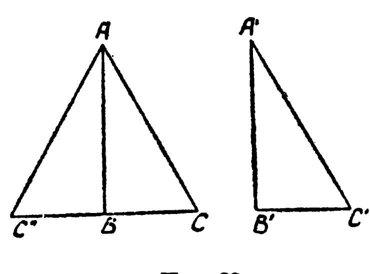
угольники равны. Теперь про равенство углов, прилегающих к равным катетам у другого конца каждого, не говорится, так как эти углы прямые, а они всегда равны (на чер. 81, где $\angle A$ и $\angle A'$ прямые, достаточно для равенства треугольников знать, что $AB = A'B'$ и $\angle B = \angle B'$).

Можно вместо прилежащих углов к катетам взять углы, противолежащие этим катетам: если $\angle C = \angle C'$, то и $\angle B = \angle B'$, так как $\angle B + \angle C = d$ и $\angle B' + \angle C' = d$.

Признак равенства треугольников по трем равным сторонам здесь нет нужды применять: мы уже знаем, что для равенства прямоугольных треугольников достаточно знать равенство двух сторон, а именно двух катетов (1-й признак).

3-й признак. Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то эти прямоугольные треугольники равны.

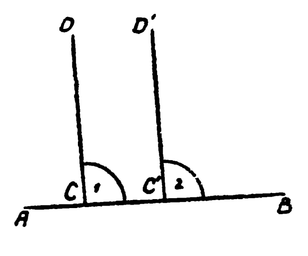
Этот признак является следствием общего признака: если 2 угла и сторона между ними одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне между ними другого, то эти треугольники равны. В самом деле, пусть имеем 2 прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$ (чер. 81), у которых $BC = B'C'$ и $\angle C = C'$. Так как мы знаем, что $\angle B + \angle C = d$ (сумма всех трех внутренних углов $\triangle ABC = 2d$, но $\angle A = d$, следов., $\angle B + \angle C = d$) и $\angle B' + \angle C' = d$ (ибо $\angle A' = d$), а нам известно, что $\angle C = \angle C'$, то отсюда приходим к заключению, что $\angle B = \angle B'$ и тогда сторона BC и два прилегающих к ней угла $\angle C$ и $\angle B$ одного треугольника равны соответственно стороне $B'C'$ и двум прилегающим к ней углам другого $\angle C'$ и $\angle B'$, а мы знаем, что в этом случае $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.



Чер. 82.

4-й признак. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого, то такие прямоугольные треугольники равны.

Этот признак удобнее всего выяснить следующим образом. Пусть имеем 2 прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$ (чер. 82), причем $\angle B = d$ и $\angle B' = d$, у которых $AC = A'C'$ и $AB = A'B'$. Приложим $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$ так, чтобы у них совпали равные катеты, т.-е. $A'B'$ совпал бы с AB, и сами треугольники расположились бы по разные стороны от прямой AB, для этого иногда (напр., в случае, данном на чертеже) придется $\triangle A'B'C'$ перевернуть другою стороною. Тогда сторона $B'C'$ должна пойти по такому направлению BC'', чтобы $\angle ABC''$ оказался прямым (ибо $\angle B' = d$), а, следов., $\angle CBC''$ оказался бы выпрямленным, т.-е. направление BC'' должно быть продолжением стороны CB. Если точка C' попадет в точку C'', то, построив сторону AC'', получим $\triangle ABC''$, равный $\triangle A'B'C'$. Так как CBC'' есть прямая линия, то получим еще $\triangle ACC''$, у которого сторона $AC = AC''$, потому что AC'' есть гипотенуза $A'C'$ треугольника $A'B'C'$, помещенного в положение ABC''. Следовательно, $\triangle ACC''$ равнобедренный, а в таком случае углы при его основании равны, т.-е. $\angle C = \angle C''$, или $\angle C = \angle C'$. Оказалось, что у $\triangle ABC$ и $\angle A'B'C'$ имеется еще по равному острому углу, а в таком случае, на основании предыдущего признака, мы можем заключить, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.



Чер. 83.

75. Пусть построено: 1) $CD \perp AB$ и 2) $C'D' \perp AB$ (чер. 83); тогда, напр., $\angle 1 = \angle 2$, так как оба они прямые. Но эти углы суть соответственные при прямых CD и $C'D'$, пересеченных секущею AB, — следов., $CD \parallel C'D'$

Наоборот, пусть построенно: 1) $CD \parallel C'D'$ и 2) $AB \perp CD$ (чер. 83); тогда AB должна пересечь и прямую $C'D'$ (n° **32**, I), напр. в точке C'. Легко увидим, что $\angle 2 = \angle 1$, так как эти углы соответственные при параллельных CD и $C'D'$ и секущей AB, но $\angle 1 = d$, так как $AB \perp CD$, — следов., и $\angle 2 = d$, т.-е. $AB \perp C'D'$.

Поэтому имеем 2 заключения:

1) Два перпендикуляра к прямой параллельны.

2) Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных, перпендикулярна и к другой.

76. Упражнения. 1. Построить прямоугольный △ по катетам.

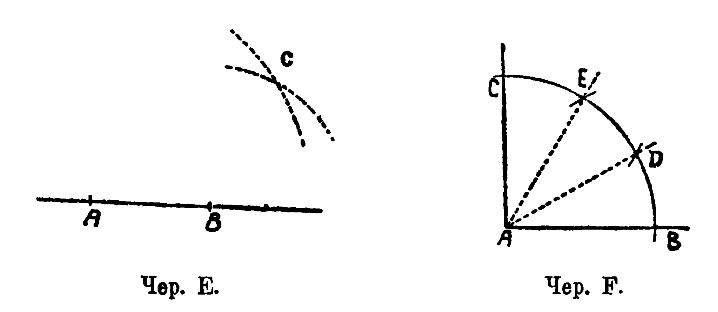
2. Построить прямоугольный △ по катету и одному из острых углов.

3. Построить прямоугольный △ по гипотенузе и острому углу.

4. Построить прямоугольный △ по гипотенузе и катету.

5. Построить высоты параллелограмма. Указать среди них равные.

6. Задачу «построить перпендикуляр к данной прямой чрез данную вне ее точку» можно решить следующим построением: на данной прямой берем 2 произвольных точки A и B (чер. E) и, принимая их



Чер. E. Чер. F.

последовательно за центры, построим два круга радиусами AC и BC, где C данная точка. Окончить это построение и выяснить его справедливость.

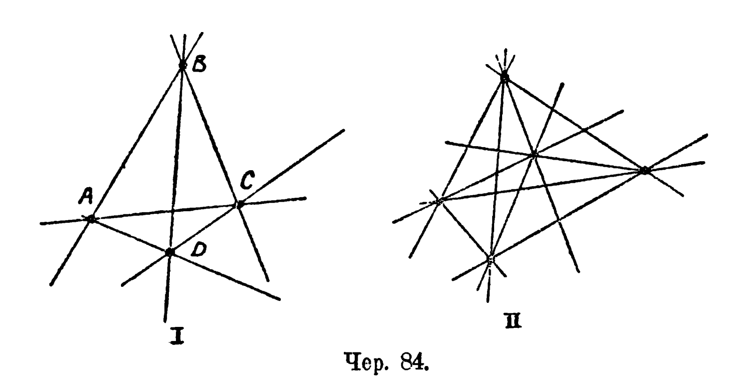
7. Разделить прямой угол на 3 равных части.

Третью часть прямого угла легко построить: каждый внутренний угол равностороннего треугольника $=\frac{2d}{3}$, а его половина $=\frac{d}{3}$. Наиболее удобное расположение построения следующее: принимая вершину A прямого угла за центр (чер. F), строим произвольным радиусом окружность: затем, принимая за центры точки C и B — точки пересечения построенной окружности со сторонами прямого угла — строим тем же радиусом дуги, пересекающие построенную окружность в точках D и E. Тогда △AEB и △ACD равносторонние, и лучи AD и AE делят прямой ∠A на 3 равных части.

ГЛАВА VII.

Многоугольники.

77. Нам уже приходилось строить четыреугольники (n° **50**). Теперь расширим это построение. Пусть даны 4 точки: *A*, *B*, *C* и *D* [(чер. 84 (I)]; построим всевозможные прямые, соединяющие попарно эти 4 точки — мы полагаем, что никакие 3 из данных точек не расположены на одной прямой. Таких прямых

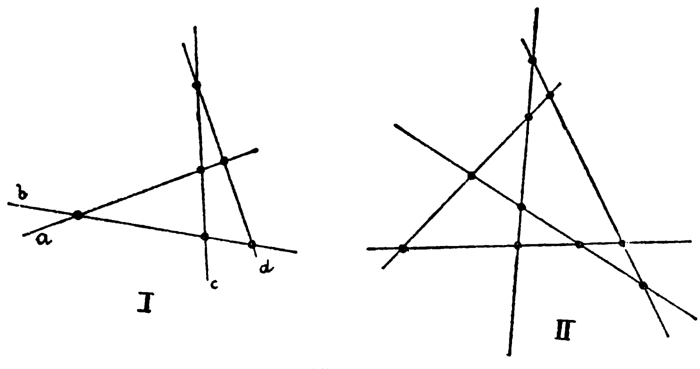


Чер. 84.

можно всего построить 6 (из каждой точки к трем остальным идут 3 прямых, так как точек 4, то всего прямых $3 . 4 = 12$, но каждая прямая здесь считалась два раза, напр., прямая *AC*: один раз мы ее считали идущею от *A* к *C* и другой раз — от *C* к *A*; поэтому различных прямых должно быть $\frac{4.3}{2} = 6$). Полученная фигура состоит из 4 точек и 6 соединяющих их попарно прямых, — она называется полным четыреугольником. Каждая из данных четырех точек называется его вершиною, а каждая входящая в его состав прямая — его стороною: у полного 4-угольника 4 вершины и 6 сторон.

Если мы возьмем 5 точек (чер. 84 — II), чтобы никакие 3 из них не лежали на одной прямой, и соединим их попарно прямыми то получим полный 5-угольник; у него 5 вершин и 10 сторон У полного 6-угольника 6 вершин и 15 сторон и т. д.

Наоборот, можно построить 4 прямых a, b, c и d (чер. 85—I) так, чтобы никакие три из них не проходили чрез одну точку, и найти их точки пересечения. Предположим, что среди прямых a, b, c и d нет ни одной пары параллельных; тогда каждая прямая с тремя остальными пересекается в трех точках, а всего точек пересечения $3.4=12$, но здесь каждая точка считалась 2 раза: один раз, напр., от пересечения прямой a с прямой b, а другой раз от пересечения прямой b с прямой a; поэтому число различных точек пересечения должно быть $\frac{4.3}{2}=6$. Полученная фигура, состоящая из 4 прямых и из 6 точек их пересечения, называется **полным четырехсторонником**; каждая прямая называется его **стороною** и каждая точка — его **вершиною**.

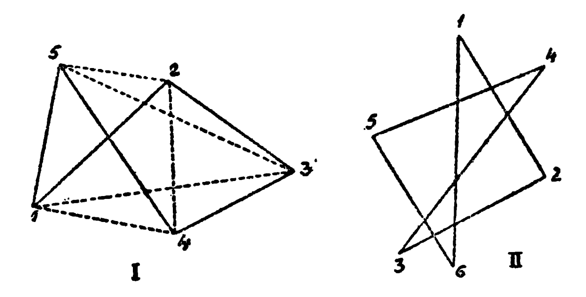


Чер. 85.

У четырехсторонника 4 стороны и 6 вершин. Если такое же построение выполнить с 5 прямыми, то получим **полный пятисторонник** (чер. 85—II). У него, если положим, что среди 5 прямых нет ни одной пары параллельных, 5 сторон и 10 вершин. У полного шестисторонника (с тою же оговоркою относительно прямых) 6 сторон и 15 вершин и т. д.

78. Возьмем опять несколько точек и соединим их попарно прямыми, но не каждую с каждой, а, наметив предварительно их порядок, каждую с последующей (последнюю опять с первой). Построенная таким образом фигура носит название: **простой многоугольник** — на чер. 86 даны изображения простых **5-угольника** и **6-угольника**.

Порядок взятых точек на чертеже обозначен цифрами; здесь надо, чтобы три соседних точки не лежали на одной прямой. Каждая точка, входящая в состав простого многоугольника, называется его вершиною и каждая прямая — его стороною (мы можем здесь, как это было и в треугольнике, понимать под этим именем лишь отрезок прямой, соединяющий две соседних вершины многоугольника). Не трудно увидать, что в простом многоугольнике столько же сторон, сколько и вершин. Если соединить прямою две несоседних вершины, то полученная прямая (или ее отрезок, заключенный между взятыми вершинами) называется диагональю этого многоугольника. На чер. 86 (I) построено пунктиром 5 диа-

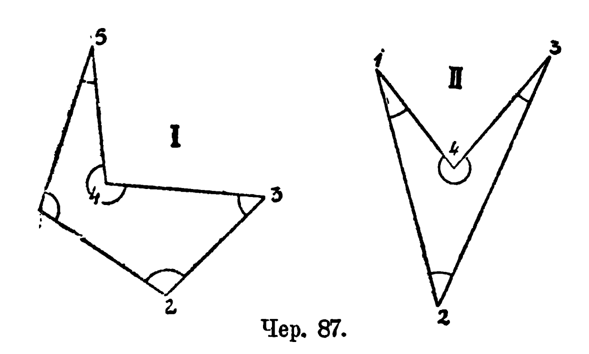


Чер. 86.

гоналей простого пятиугольника. В простом шестиугольнике можно построить 9 диагоналей (на чер. 86 — II они не построены). Так как у простого многоугольника сторон столько же, сколько и вершин, то их можно еще называть п р о с т ы м и — м н о г о с т о р о н н и к а м и (простой пятисторонник и т. п.). На чер. 87 и 88 даны еще различные виды простых многоугольников.

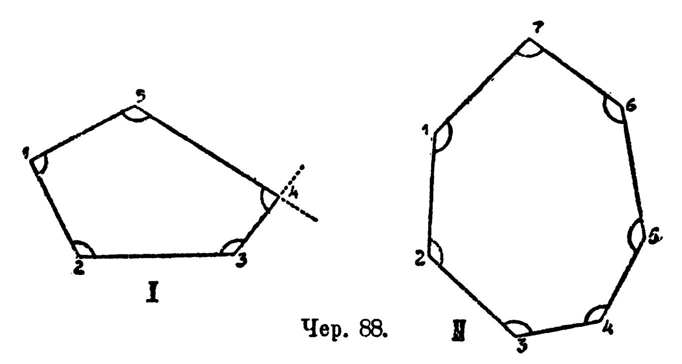
79. В курсе элементарной геометрии рассматривают только простые многоугольники, а потому их часто называют одним словом м н о г о у г о л ь н и к и. При построении простых многоугольников могут быть два случая: 1) стороны многоугольника, понимая под этим именем отрезки прямых между двумя вершинами, пересекают друг друга (см. чер. 86) и 2) не пересекают друг друга (чер. 87 и 88). Между этими двумя случаями существенная разница. В то время, как во втором случае мы видим, что

многоугольник выделяет из плоскости ее определенную часть, которая называется площадью этого многоугольника, в первом случае мы видим, что там выделяется несколько частей — особенно это заметно на чер. 86, II, — причем можно выделить



Чер. 87.

даже иногда такие две части, что одна из них частию наложена на другую; здесь, следовательно, мы не видим сразу площадь, ограничиваемую этим многоугольником. Поэтому мы будем называть многоугольники, подходящие под второй случай (чер. 87 и 88),



Чер. 88.

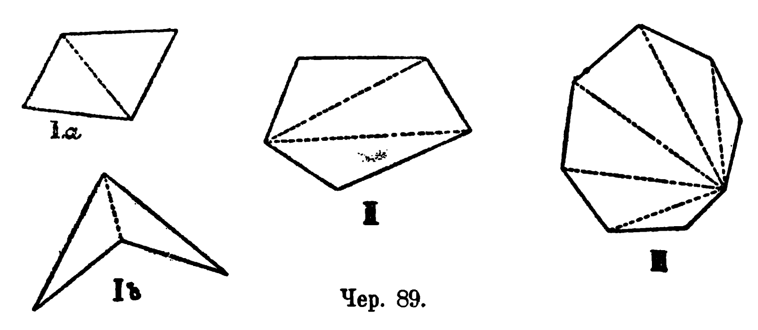
имеющими площадь, и многоугольники, подходящие под первый случай (чер. 86) — не имеющими площади (их еще называют звездчатыми).

Следует заметить, что, сделав несколько условий, позволяющих части плоскости считать то положительными, то отрицательными, можно считать, что всякий многоугольник имеет площадь. Вопрос о площади звездчатых многоугольников не входит в курс элементарной геометрии.

Часто еще рассматривают так называемый периметр многоугольника; этим именем называют сумму всех сторон многоугольника.

80. В элементарной геометрии почти исключительно рассматриваются многоугольники, имеющие площадь. При каждой вершине такого многоугольника получаются углы, по 4 угла при каждой, если под сторонами многоугольника понимать бесконечные прямые (напр., см. углы при вершине 4 пятиугольника I чер. 88). Один из этих углов, внутренняя область которого захватывает площадь многоугольника, называется внутренним; при каждой вершине многоугольника получается по одному внутреннему углу (на чер. 87 и 88 внутренние углы отмечены дугами).

Здесь опять возникает разделение многоугольников, имеющих



Чер. 89.

площадь, на два класса: 1) каждый внутренний угол многоугольника меньше выпрямленного угла, — такие многоугольники называются выпуклыми (чер. 88); 2) может случиться, что один или несколько внутренних углов больше выпрямленного (на чер. 87 углы при вершинах 4 в обоих многоугольниках), — такие многоугольники называются невыпуклыми.

Выпуклый многоугольник обладает свойством, что все его вершины расположены по одну сторону от каждой его стороны (понимая под этим именем бесконечную прямую). Невыпуклый многоугольник этим свойством не обладает.

В дальнейшем нам придется иметь дело, главным образом, с выпуклыми многоугольниками.

81. Первою нашею задачею о многоугольниках явится нахождение суммы внутренних углов многоугольника.

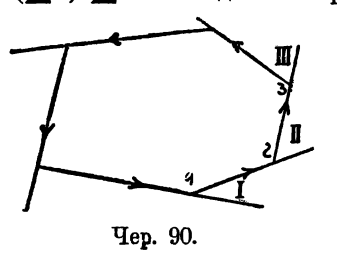
Если мы возьмем какой-либо четыреугольник, имеющий площадь [чер. 89, I (a) или I (b)], и построим одну из его диаго-

налей — в случае I (a) безразлично какую, а в случае I (b), ту, которая расположена на площади этого 4-угольника (внутри его), то получим 2 треугольника. Сумма внутренних углов каждого треугольника $= 2d$, следовательно, сумма внутренних углов 4-угольника $= 2d \cdot 2 = 4d$. Если возьмем какой-либо 5-угольник и построим две диагонали, идущие из одной его вершины (чер. 89, II), то получим 3 треугольника; так как сумма внутренних углов треугольника $= 2d$, то сумма внутренних углов 5-угольника $=$ $= 2d \cdot 3 = 6d$; также для 6-угольника получим 4 треугольника и, следовательно, сумма его внутренних углов $= 2d \cdot 4 = 8d$ и т. д. Если возьмем, напр., 11-угольник, то после построения диагоналей получим 9 треугольников. Сумма внутренних углов 11-угольника $=$ $= 2d \cdot 9 = 18d$. Вообще, если возьмем n-угольник, то после построения диагоналей из одной его вершины получим $(n-2)$ треугольников и, следовательно, сумма внутренних углов этого многоугольника выразится формулою:

$$2d(n-2)$$

где n выражает число сторон или вершин этого многоугольника.

82. Вторым вопросом будет вопрос о сумме внешних углов многоугольника. Под названием „внешний угол“ можно понимать, как это мы уже и делали для треугольника, угол, составленный продолжением одной стороны многоугольника со следующею стороною ($\angle$ I, $\angle$ II и т. д. на чер. 90). Станем итти по сторонам этого многоугольника, который будем считать выпуклым, напр., по направлению, указанному стрелками, и каждую из сторон продолжать в том же направлении. Тогда получим ряд внешних углов: $\angle$ I, $\angle$ II и т. д. Рассмотрим сначала одну пару углов: внутренний и внешний при общей вершине, напр., $\angle 1$ и $\angle$ I; тогда мы видим, что сумма их есть выпрямленный угол, т.-е.



Чер. 90.

$$\angle 1 + \angle \text{I} = 2d.$$

Также найдем при другой вершине: $\angle 2 + \angle \text{II} = 2d$ и т. д. Если положим, что всего вершин в многоугольнике было n, таких пар углов также n, и следовательно:

(Сумма внутр. углов) $+$ (сумма внешн. углов) $= 2d \cdot n$.

Но мы знаем, что

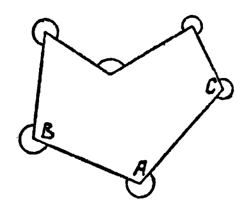
$$\text{сумма внутренних углов} = 2d(n-2).$$

Следовательно:

$$\text{Сумма внешних углов} = 2dn - 2d(n-2) =$$
$$= 2dn - 2dn + 4d = 4d$$

т.-е. сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от числа сторон (или вершин) этого многоугольника и всегда $= 4d$.

83. Добавление. Можно название «внешний угол» понимать и в другом смысле. Пусть имеем какой-либо многоугольник (чер. 91), имеющий площадь, хотя бы и не выпуклый. Тогда под внешним углом можно понимать угол, составленный сторонами многоугольника, а не их продолжениями, как и внутренний угол, напр., $\angle BAC$, но за внутреннюю его область принять ту часть плоскости, выделяемую сторонами этого угла, которая не заключает в себе площади этого многоугольника. Внутренняя область каждого из этих углов отмечена на чертеже дугою. Тогда каждый такой угол, вместе с соответствующим ему внутренним углом, составляет 2 выпрямленных угла или $4d$, напр., внутренний $\angle BAC +$ внешний $\angle BAC = 4d$.



Чер. 91.

Если сторон у многоугольника n, то сумма всех внутренних и сумма всех внешних $= 4d \cdot n$, а, следовательно, сумма внешних углов $= 4dn - 2d(n-2) = 4dn - 2dn + 4d = 2dn + 4d = 2d(n+2)$.

84. Упражнения. 1. Построить полный шестиугольник. Сколько у него сторон?

2. Построить полный шестисторонник так, чтобы у него не было параллельных сторон. Сколько у него вершин?

3. Найти общую формулу для числа сторон полного n-угольника и для числа вершин полного n-сторонника (полагая, что у последнего нет параллельных сторон).

4. Сколько диагоналей можно построить из одной вершины простого n-угольника?

5. Сколько всего диагоналей у простого n-угольника?

6. Выразить в частях прямого угла каждый внутренний угол выпуклого пятиугольника, если у него все углы равны между собою.

7. Выразить для пятиугольника предыдущей задачи каждый внешний угол в частях прямого угла.

8. В равнобедренном треугольнике каждый угол при основании $= {}^3/_4 d$. Найти (в частях прямого угла) его угол при вершине.

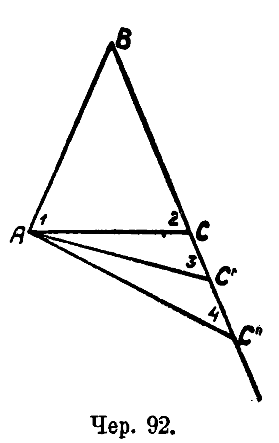
9. В равнобедренном треугольнике угол при вершине $= {}^5/_8 d$. Найти его угол при основании.

10. В выпуклом четыреугольнике противоположные углы попарно равны между собою. Выяснить, что такой четыреугольник есть параллелограмм.

ГЛАВА VIII.

Неравные углы и стороны в треуг-ках.

85. Построим равнобедр. $\triangle ABC$ (чер. 92), у которого $AB = BC$. Тогда мы знаем, что его углы при основании равны, т.-е. $\angle A = \angle C$. Пронумеруем эти углы, — тогда $\angle 1 = \angle 2$. Станем теперь строить новые треугольники ABC', ABC'' и т. д. так, чтобы сторона AB и $\angle B$ оставались неизменными, но сторона BC увеличивалась. Тогда угол A должен увеличиваться (что очевидно), а угол C станет уменьшаться: мы видим, что $\angle 3 < \angle 2$, $\angle 4 < \angle 3$ и т. д., потому что $\angle 2$ есть внешний угол для $\triangle ACC'$ и, следов., $\angle 2 > \angle 3$ или $\angle 3 < \angle 2$, также $\angle 3$ есть внешний угол $\triangle AC'C''$ и, след., $\angle 3 > \angle 4$ или $\angle 4 < \angle 3$ и т. д. (уменьшение угла C видно еще из того, что сумма углов треугольника всегда равна $2d$: угол B неизменяется, угол A увеличивается, — след., $\angle C$ должен уменьшаться). Из этих построений мы вправе сделать заключения:



Чер. 92.

1) Если в треугольнике две стороны равны, то против них лежат равные углы.

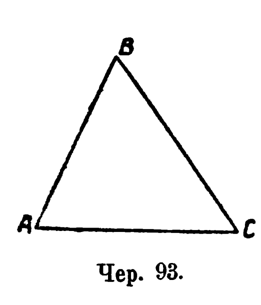
2) Если в треугольнике две стороны не равны, то против большей из них лежит и больший угол.

86. Теперь, наоборот, построим: 1) треугольник с двумя равными углами и 2) треугольник с двумя неравными углами и сравним стороны, противолежащие этим углам. Для решения

вопросов, здесь возникающих, воспользуемся способом рассуждения, часто употребляемым в математике.

1) Пусть $\triangle ABC$ (чер. 93) построен так, что $\angle A = \angle C$. Сравнить стороны BC и BA.

Пока, не зная ничего про стороны AB и BC, мы можем сделать об них 3 предположения: 1) $AB = BC$, 2) $AB > BC$ и 3) $AB < BC$ — иных предположений быть не может. Рассматривая эти предположения, мы можем заметить, что два из них не годятся, так как противоречат предыдущему. В самом деле, 2-е предположение, что $AB > BC$ должно, на основании предыдущего n°, повлечь за собою следствие, что $\angle C > \angle A$, а у нас построено: $\angle C = \angle A$. Следовательно, это предположение должно быть вычеркнуто. Также из 3-го предположения, что $AB < BC$ следует, что $\angle A > \angle C$, что также противоречит нашему построению. Следовательно, и это предположение должно быть вычеркнуто. Остается поэтому лишь одно предположение, что $AB = BC$, которое и должно быть верно, так как иных сделать нельзя. Поэтому имеем:



Чер. 93.

Если в треугольнике два угла равны, то против них лежат равные стороны.

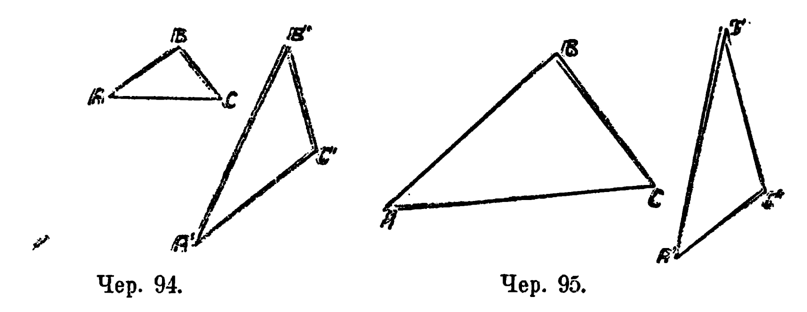
2) Пусть $\triangle ABC$ (чер. 93) построен так, что $\angle A > \angle C$. Сравнить стороны BA и BC.

Опять мы можем сделать 3 предположения: 1) $AB = BC$, 2) $AB > BC$ и 3) $AB < BC$. Теперь видим, что первое предположение не годится, так как на основании n° 85 из него вытекало бы, что $\angle C = \angle A$, что противоречит нашему построению; также найдем, что 2-е предположение, что $AB > BC$ не годится, так как из него вытекало бы, что $\angle C > \angle A$, что противоречит построению. Остается лишь 3-е предположение, что $AB < BC$, которое и должно быть верно. Поэтому имеем:

Если два угла в треугольнике неравны, то против большего из них лежит большая сторона.

Теперь легко решаются вопросы: 1) какая из сторон прямоугольного треугольника самая большая? 2) Какая из сторон тупоугольного треугольника самая большая?

87. В двух предыдущих nn° мы имели дело с двумя положениями: 1) против большей стороны лежит больший угол и 2) против большего угла лежит большая сторона. Мы нашли, что эти мысли справедливы для одного треугольника. Возникает вопрос, справедливы ли они для двух треугольников? Несомненно справедливы для двух равных треугольников, так как равные треугольники можно наложением слить в один треугольник. Но, вообще говоря, к двум различным (не равным) треугольникам эти положения не могут быть применимы: мы можем построить два таких треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C$ (чер. 94), чтобы $\angle B$ был $> \angle B'$, но AC была бы $< A'C'$. Чертеж пояснений не требует. Но есть один случай, когда указанные мысли применимы и к двум различным треугольникам[1]).



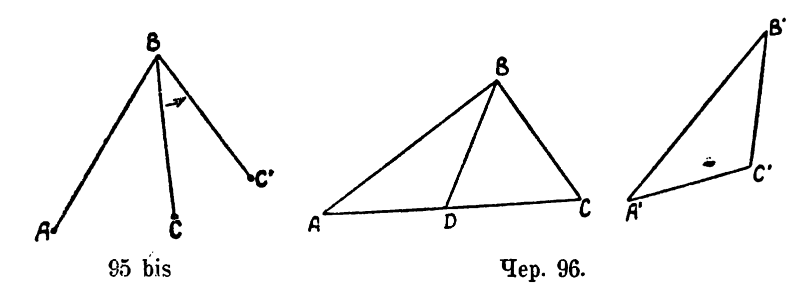
Чер. 94. Чер. 95.

Построим два таких треугольника, чтобы у них было по дво равных стороны, но чтобы углы между ними не были равны. Пусть в $\triangle ABC$ и в $\triangle A'B'C'$ (чер. 95) имеем $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, но $\angle B > \angle B'$. Сравним стороны AC и $A'C'$, ле-

[1]) Этот случай легко уясняется наглядно. Возьмем две палочки AB и BC (чер. 95 bis) и сложим их концами (в точке B). Если вращать палочку BC около точки B по стрелке, то $\angle$ B станет увеличиваться; сторона BC будет менять свое положение (пусть одно из них есть BC'), но все время BC остается равным самому себе; не изменяется так же и отрезок AB. Обратим внимание, что точками A и C определяется еще отрезок AC, на чертеже не изображенный. При вышеуказанном вращении точка C меняет свое место и нам ясно, что этот отрезок AC, не изображенный на чертеже, должен увеличиваться (напр., AC' > AC), т.-е., если 2 стороны треугольника не изменяются, а угол между ними увеличивается, то третья сторона так же увеличивается. В тексте этот случай выяснен без помощи такого наглядного представления.

жащие против неравных углов. Для этого наложим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона $A'B'$ совпала с равною ей стороною AB. Тогда сторона $B'C'$ должна пойти внутри $\angle B$, потому что $\angle B' < \angle B$, но где кончится эта сторона, т.-е., где расположится точка C', неизвестно. Может быть, она расположится как раз на стороне AC, может быть, расположится вне $\triangle ABC$, а может быть внутри этого треугольника. Разберем эти три случая отдельно.

1) Пусть $\triangle A'B'C'$ расположится так, что займет положение $\triangle ABD$ (чер. 96), так что точка C' попадет в D, на сторону AC;

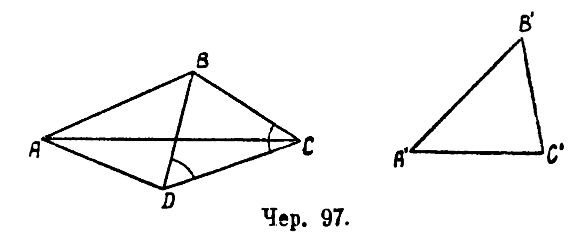


95 bis

Чер. 96.

тогда, очевидно, $AD < AC$ или $A'C' < AC$ (AD есть та же сторона $A'C'$, только перенесенная в другое место).

2) Пусть $\triangle A'B'C'$ при наложении займет положение $\triangle ABD$ (чер. 97), т.-е. точка C' расположится в точке D, вне $\triangle ABC$.

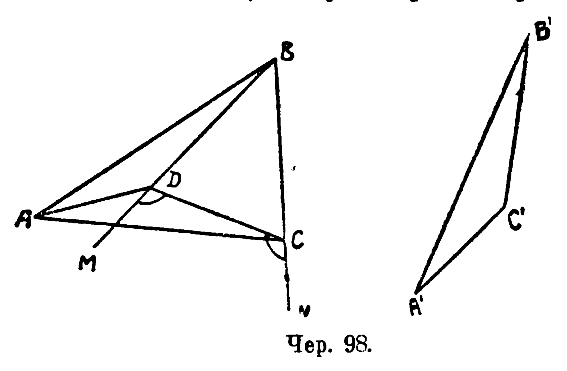


Чер. 97.

Тогда, соединив точки C и D, получим $\triangle BCD$, у которого $BC = BD$, так как, по построению, $B'C' = BC$, а BD есть та же сторона $B'C'$, лишь перенесенная в другое место. Поэтому $\triangle BCD$ — равнобедренный, и $\angle BCD = \angle BDC$. Рассмотрим теперь $\triangle ACD$; про два его угла, а именно про $\angle C$ (или $\angle ACD$) и про $\angle D$ (или $\angle ADC$) легко сообразить, пользуясь отмеченными

равными углами равнобедренного треугольника, какой из них больше другого. В самом деле, мы видим, что $\angle ACD <$ отмеченного угла BCD при основании равнобедренного треугольника, а $\angle ADC >$ отмеченного угла BDC при основании равнобедренного треугольника. Но $\angle BCD = \angle BDC$, следовательно, $\angle ADC > \angle ACD$. Поэтому на основании n° 86 (применяя его к $\triangle ACD$) имеем $AC > AD$, но AD есть сторона $A'C'$, перенесенная в другое место, — следовательно, $AC > A'C'$.

3) Пусть $\triangle A'B'C'$ при наложении займет положение $\triangle ABD$ (чер. 98), т.-е. точка C' расположится внутри $\triangle ABC$. Тогда, соединив точки C и D, получим равнобедренный $\triangle CBD$



Чер. 98.

($BD = BC$, ибо BD есть сторона $B'C'$, перенесенная в другое положение, а $B'C' = BC$ по построению) и, следовательно, $\angle BCD = \angle BDC$. Если продолжить стороны BD и BC по направлениям DM и CN, то получим два внешних угла этого равнобедренного треугольника $\angle MDC$ и $\angle NCD$, которые равны между собою, так как каждый из них дополняет равные углы равнобедренного треугольника до выпрямленного. Рассмотрим теперь $\triangle ADC$; у него $\angle ADC > \angle MDC$ и $\angle ACD < \angle NCD$, но $\angle MDC = \angle NCD$, следовательно, $\angle ADC > \angle ACD$, а поэтому, на основании n° 86, имеем $AC > AD$, или $AC > A'C'$ (AD есть сторона $A'C'$, перенесенная в другое положение).

Итак, во всех трех случаях оказалось, что

$$AC > A'C',$$

т.-е., **если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого тре-**

угольника, но углы между ними не равны, то против большого угла лежит большая сторона.

88. Разберем обратный вопрос. Пусть построены $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (чер. 95) так, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, но $AC > A'C'$, т.-е. два треугольника имеют по две равных стороны, но третьи стороны их не равны. Сравнить $\angle B$ и $\angle B'$.

Воспользуемся тем же способом рассуждения, как в n° 86.

Пока мы можем об углах B и B' сделать три предположения: 1) $\angle B = \angle B'$, 2) $\angle B > \angle B'$ и 3) $\angle B < \angle B'$.

Первое предположение не годится, так как тогда наши треугольники, имея по построению по две равных стороны и равные углы между ними, были бы равны, и, следовательно, $AC' = A'C'$, а это противоречит построению. Третье предположение, что $\angle B < \angle B'$ также не годится, так как тогда к этим треугольникам был бы применим результат, найденный в предыдущем n°, на основании которого имели бы $AC < A'C'$, что также противоречит построению. Остается второе предположение, что $\angle B > \angle B'$, которое и должно быть верно. Итак:

Если две стороны одного треугольника равны соответственно двум сторонам другого, но третьи стороны этих треугольников не равны, то против большей стороны лежит и больший угол.

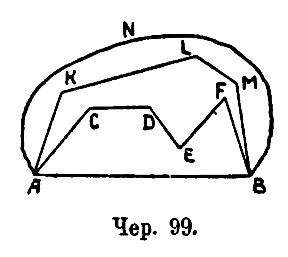
ГЛАВА IX.

Расстояние между двумя точками.

89. Пусть даны 2 точки A и B (чер. 99). Мы можем построить: 1) прямолинейный отрезок AB, концы которого совпадают с данными точками; 2) несколько линий, из которых каждая соединяет точки A и B и состоит из ряда прямолинейных отрезков, напр., $ACDEFB$ или $AKLMB$, — такие линии называются ломаными и 3) ряд кривых линий, соединяющих точки A и B, напр., ANB (мы умеем строить из кривых линий только одну — дугу круга, но возможно вообразить, что через точки A и B проходит множество и иных каких-либо кривых линий, отли-

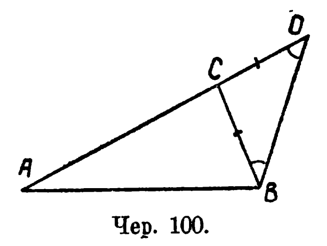
чающихся по форме от дуги круга). Возникает вопрос о сравнении между собою всех этих линий.

Прежде чем обратиться к рассмотрению этого вопроса, обратим внимание на два различных вида ломаных линий, причем мы ограничимся тем случаем, когда ломаная располагается только по одну сторону прямой AB, продолженной в обе стороны: ломаная $AKLMB$ вместе с отрезком AB составляют многоугольник, имеющий площадь, все внутренние углы которого меньше выпрямленного, — такой многоугольник называется, как мы знаем, выпуклым; поэтому и сама ломаная $AKLMB$ называется **выпуклою** ломаною, а ломаная $ACDEFB$ вместе с отрезком AB составляет многоугольник, имеющий площадь, один из внутренних углов которого (при точке E) больше выпрямленного, — такой многоугольник, как знаем, не выпуклый; поэтому и сама ломаная $ACDEFB$ **не выпуклая**.



Чер. 99.

90. Приступая к решению намеченного вопроса, сравним сначала отрезок AB, соединяющий точки A и B (чер. 100), с простейшею ломаною ACB, состоящею только из двух прямолинейных отрезков AC и CB. Для выполнения этого сравнения надо ломаную ACB выпрямить, т.-е. расположить отрезки AC и BC на одной прямой, приложенными друг к другу, или сложить отрезки AC и CB (n° **9**). Для этого продолжим отрезок AC и на его продолжение отложим отрезок $CD = CB$. Тогда $AD = AC + CD$ или $AD = AC + CB$. Построив отрезок BD, получим равнобедренный $\triangle BCD$ ($CD = CB$), у которого углы при основании равны, т.-е. $\angle CBD = \angle CDB$. Рассматривая затем $\triangle ABD$, видим, что $\angle ABD > \angle CBD$, а, следовательно, $\angle ABD > \angle CDB$ (ибо $\angle CDB = \angle CBD$). На основании n° 86 имеем поэтому $AD > AB$ (против большого угла в треугольнике лежит и большая сторона), или $AC + CB > AB$, т.-е. ломаная ACB больше отрезка AB.



Чер. 100.

Этот результат удобно выразить в следующей форме: После построения отрезка AB и ломанной ACB, мы получили $\triangle ACB$, и тогда сумма $AC+CB$ есть сумма двух его сторон, причем у нас оказалось, что $AB<AC+CB$, т.-е.

Одна сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

91. Здесь можно получить еще соотношение между сторонами треугольника. Мы нашли для $\triangle ACB$ (чер. 100)

$$AC+CB>AB.$$

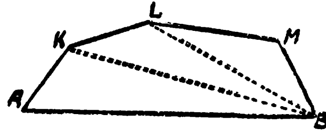
Воспользуемся следующим очевидным для нас соображением: если одно число больше другого и если мы вычтем из них поровну, то первая разность остается больше второй; также, если один отрезок больше второго и если мы из них вычтем (n° **10**) одинаковые отрезки, то первая разность останется больше второй. Заметим, что $AC+CB$ мы рассматриваем, как один отрезок, так как мы умеем складывать два отрезка. Вычтем из большого отрезка ($AC+CB$) и из меньшего AB по одинаковому отрезку, а именно по отрезку CB; тогда получим, согласно выше изложенному соображению,

$$AC>AB-CB,$$

т.-е. одна сторона треугольника больше разности двух других.

Найденные в nn° 90 и 91 соотношения между сторонами треугольника те же самые, которые были указаны в n° 38.

92. Построим теперь через точки A и B отрезок AB и выпуклую ломаную $AKLMB$ (чер. 101), состоящую из скольких угодно отрезков. Требуется сравнить ломаную $AKLMB$ с отрезком AB.



Чер. 101.

Чтобы воспользоваться предыдущим, построим вспомогательный отрезок BK, тогда из $\triangle AKB$:

$$AB<AK+KB.$$

Построив еще отрезок LB, найдем из $\triangle KLB$:

$$KB<KL+LB.$$

И, наконец, из $\triangle LMB$ получим:

$$LB<LM+MB.$$

Воспользуемся соображением: если каждый из нескольких отрезков меньше каких-либо других отрезков, то и сумма меньших отрезков меньше суммы больших. Применяя это к нашим отрезкам, имеем:

$$\underbrace{AB+KB+LB}<\underbrace{AK+KB}+\underbrace{KL+LB}+LM+MB.$$

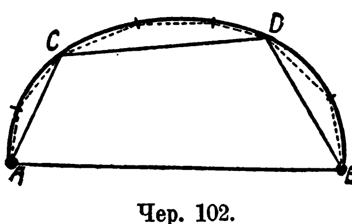
Вычтя из обеих сумм одинаковые отрезки (KB и LB), найдем:

$$AB<AK+KL+LM+MB,$$

т.-е. **прямолинейный отрезок, соединяющий две точки, меньше всякой выпуклой ломаной, соединяющей те же точки.**

Ясно, что это свойство применимо и к невыпуклой ломаной; напр., если имеем ломаную $ACDEFB$ (чер. 99), то, построив отрезок DF получим ломаную $ACDFB$, которая больше отрезка AB, а замена отрезка DF суммою $DE+EF$ еще увеличит эту ломаную (n° 90).

93. Пусть построена какая-либо кривая ACB (чер. 102), соединяющая точки A и B. Выпрямлять ее, как выпрямляли в n° 90 ломаную, мы не умеем, и поэтому приходится довольствоваться здесь косвенными соображениями. Возьмем на кривой какие-либо точки C и D и соединим их с A и B и между собою отрезками, получим ломаную $ACDB$; если на частях кривой AC, CD, DB возьмем какие-либо еще промежуточные точки и построим ломаную, то, при достаточном числе этих промежуточных точек, отрезки новой ломаной могут быть сделаны меньше отрезков первой ломаной. Мы можем этот процесс продолжить дальше, — тогда будут получаться ломаные линии, имеющие все больше и больше вершин, которые все располагаются на нашей кривой, а стороны или отрезки этих ломаных все уменьшаются. Возможность продолжать такое построение ломаных сколь угодно далеко позволяет нам признать, что возможно кривую линию рассматривать, как ломаную, составленную из бесконечно боль-



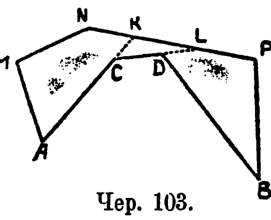
Чер. 102.

шого числа бесконечно малых отрезков. Поэтому мы в праве применить свойство n° 92 ломаной и к кривой, и тогда будем иметь, что отрезок AB надо считать меньшим, чем кривая ACB.

В виду найденных соотношений между различными линиями, соединяющими две точки, мы установим:

Под словами: расстояние между двумя точками понимают: прямолинейный отрезок, соединяющий эти две точки.

94. Сравним затем две выпуклых ломаных линии, соединяющих две точки и расположенных по одну сторону прямой, соединяющей эти две точки, причем одна из них охватывает (объемлет) другую.



Чер. 103.

Пусть эти ломаные суть $ACDB$ (чер. 103)—объемлемая и $AMNPB$—объемлющая.

Для их сравнения продолжим отрезки AC и CD до пересечения гделибо с отрезками объемлющей ломаной в точках K и L.

Тогда на основании nn° 90 и 92 имеем:

$$1)\ AC + CK < AM + MN + NK.$$
$$2)\ CD + DL < CK + KL.$$
$$3)\ BD < DL + LP + PB.$$

Взяв сумму меньших частей этих неравенств и сумму их больших частей, получим:

$$AC + CK + CD + DL + DB < AM + MN + NK +$$
$$+ CK + KL + DL + LP + PB.$$

Вычтем одинаковые отрезки CK и DL, — тогда:

$$AC + CD + DB < AM + MN + NK + KL + LP + PB.$$

Или, заменяя $NK + KL + LP$ чрез NP, получим:

$$AC + CD + DB + < AM + MN + NP + PB,$$

т.-е. выпуклая объемлемая ломаная, соединяющая две точки, меньше объемлющей, соединяющей те же точки.

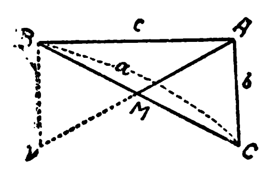
Заметим: 1) это свойство имеет силу и для кривых линий (кривую линию мы называем выпуклою, если ломаные линии, по-

лучаемые от соединения отрезками сколь угодно часто расположенных точек на этой кривой, — все оказываются выпуклыми).

2) Объемлющая линия может быть и невыпуклой.

95. **Упражнения.** I. Прямая, соединяющая вершину треугольника с серединою противоположной стороны, называется *медианою* этого треугольника. Всего в треугольнике можно построить 3 медианы, — все они, как это выяснится впоследствии, пересекаются в одной точке.

Пусть имеем ABC и AM его медиана (чер. 104) (M середина BC). Назовем для краткости сторону BC через a (против $\angle A$), сторону CA чрез b, сторону AB чрез c, медиану AM чрез m_1, медиану, идущую из точки B к средине стороны AC, чрез m_2 и третью медиану из точки C чрез m_3.



Чер. 104.

Выяснить следующие свойства медиан:

1) $m_1 < \frac{b+c}{2}$ (надо сделать следующее построение: продолжить AM и чрез B построить $BN \parallel AC$ — рассмотреть $\triangle ABN$); 2) $m_1 > \frac{b+c-a}{2}$; 3) $m_1 + m_2 + m_3 < a + b + c$. Сумма сторон треугольника называется *периметром* этого треугольника; поэтому это свойство выражают словами: *сумма медиан треугольника меньше его периметра*; 4) $m_1 + m_2 + m_3 > \frac{a+b+c}{2}$ (выразить словами).

II. Возьмем внутри треугольника какую-либо точку O (на чертеже не дана) и назовем OA чрез r_1, OB чрез r_2 и OC чрез r_3. Тогда имеют место зависимости:

1) $r_1 + r_2 + r_3 > \frac{a+b+c}{2}$ и 2) $r_1 + r_2 + r_3 < a + b + c$.

III. Распространить последние свойства на точку, взятую внутри выпуклого четыреугольника $[r_1 + r_2 + r_3 + r_4 > \frac{a+b+c+d}{2}$, но $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 1\frac{1}{2}(a+b+c+d)]$.

96. Пользуясь понятием о расстоянии между двумя точками, мы теперь можем установить на основании изложенного в n° 20:

Все точки плоскости, находящиеся на данном расстоянии от данной точки, расположены на круге, центр которого — данная точка, и радиус равен данному расстоянию. Обратно, каждая точка нашего круга находится на данном расстоянии от данной точки (от центра).

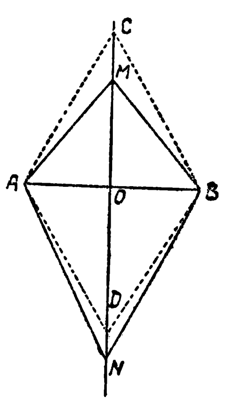
Ту же мысль выражают обыкновенно иначе, пользуясь особым термином:

Геометрическое место точек (плоскости), находящихся на данном расстоянии от данной точки, есть круг, центром которого служит данная точка и радиус которого равен данному расстоянию.

Иногда говорят: круг есть геометрическое место точек, равноотстоящих от одной точки (от центра).

97. Задача. Даны две точки. Построить перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти две точки чрез его середину.

Пусть A и B (чер. 105) — данные точки. Задача легко решается построением ромба $ACBD$, у которого две вершины суть A и B и одна диагональ есть отрезок AB. Как строить такой ромб, было уже выяснено выше. Вторая диагональ CD этого ромба проходить чрез точку O, середину отрезка AB, и перпендикулярна к AB.



Чер. 105.

Рассмотрим расстояния какой-либо точки M перпендикуляра CD от точек A и B. Соединив M с A и с B, получим $\triangle AOM$ и $\triangle MOB$, которые между собою равны (они прямоугольные и катеты одного равны соответственно катетам другого: OM общий катет и $OA = OB$). Отсюда заключаем, что $MA = MB$. Можно взять точку где-либо и на продолжении прямой CD, например, точку N; также найдем, что $NA = NB$.

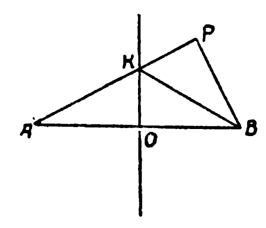
Это свойство точек построенного перпендикуляра можно выразить в следующей форме:

Всякая точка перпендикуляра, построенного к отрезку, соединяющему две данные точки, чрез середину этого отрезка, отстоит на равных расстояниях от двух данных точек (короче: равноудалена от данных точек).

Возможно ли где-либо еще на плоскости, не на перпендикуляре CD, найти точку, равноудаленную от A и B?

Возьмем где-либо не на перпендикуляре CD точку P (чер. 106) и рассмотрим ее расстояния от точек A и B, т.-е. отрезки PA и BP. Один из этих отрезков, например, PA, пересекает наш перпендикуляр CD в точке K. Тогда, соединив K и B, найдем по предыдущему

$$KB = KA,$$



Чер. 106.

ибо точка K, будучи расположена на перпендикуляре, одинаково удалена от B и A.

Кроме того, из $\triangle PKB$ имеем (n°90):

$$PB < PK + KB.$$

Или, заменяя KB чрез KA (эти отрезки равны), имеем:

$$PB < PK + KA \text{ или } PB < PA,$$

т.-е. точка P, взятая не на перпендикуляре CD, неодинаково удалена от точек A и B.

Итак, все точки, равноудаленные от двух данных, непременно должны лежать на перпендикуляре к отрезку, соединяющему данные точки, через его середину; с другой стороны, любая точка этого перпендикуляра обладает этим свойством. Поэтому говорят:

Геометрическое место точек (плоскости), равноудаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки, проходящий через его середину.

98. **Упражнения.** Найти на данной прямой или на данной окружности точку, равноудаленную от двух данных.

2. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек. Когда такой точки не существует?

ГЛАВА X.

Дальнейшее развитие понятия о расстоянии.

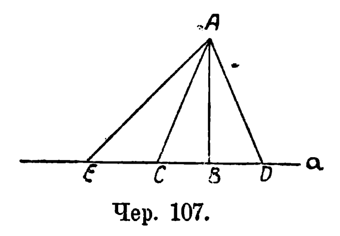
99. Пусть дана прямая a и точка A вне ее (чер. 107). Мы можем построить $AB \perp a$ и знаем (n°70), что другого перпендикуляра через A к прямой a построить нельзя; если мы построим ряд прямых, идущих из A к различным точкам данной прямой a: AC, AD, AE и т. д., то мы будем называть их наклонными

к прямой a. Точки B, C, D, E называют основаниями перпендикуляра AB, наклонных AC, AD, AE.

Из $\triangle ABC$, например, видим, что $AB < AC$, так как $\angle B$ в этом треугольнике прямой, а $\angle C$ острый (n°72), а против бо̀льшего угла лежит и бо̀льшая сторона (n°86); то-есть оказывается, что перпендикуляр AB меньше любой наклонной AC.

Пусть построены две наклонных AC и AD так, чтобы их основания C и D были одинаково удалены от основания перпендикуляра, т.-е., чтобы $BC = BD$. Тогда $\triangle ABC = \triangle ABD$ (у них катет AB общий и катет $BC = BD$), следовательно, $AC = AD$, т.-е. две наклонные, основания которых одинаково удалены от основания перпендикуляра, равны между собою.

Построим еще наклонную AE, основание которой E дальше отстоит от основания перпендикуляра, чем основание наклонной AC, т.-е. $BE > BC$. Тогда $\angle ACE$ тупой, так как этот угол есть внешний для $\triangle ACB$ и, следовательно, он больше прямого, угла B; отсюда, рассматривая тупоугольный треугольник ACE, видим (n°72), что $\angle E$ острый и опять на основании n°86 заключаем, что $AE > AC$ или $AE > AD$ (ибо $AD = AC$), т.-е., если основание одной наклонной дальше отстоит от основания перпендикуляра, чем другой, то первая наклонная больше второй.



Чер. 107.

Для того, чтобы выразить найденные свойства в более простой словесной форме, станем называть отрезок BC проэкцией наклонной AC, BD — проэкцией наклонной AD, BE — проэкцией наклонной AE и т. д. Тогда:

Если дана прямая и вне ее точка и через эту точку построены перпендикуляр и наклонные к прямой, то

1) перпендикуляр меньше всякой наклонной;

2) две наклонные с равными проэкциями равны;

3) из двух наклонных с неравными проэкциями та больше, у которой проэкция больше.

Обратно:

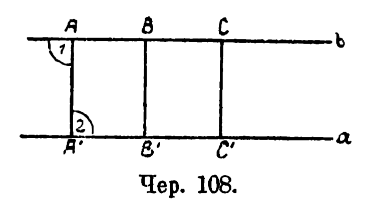
1) проэкции равных наклонных равны между собою;

2) та из двух неравных наклонных имеет большую проэкцию, которая сама больше.

Выяснить справедливость этих заключений можно способом, который был применен в n°86. Разберем 2-е обратное заключение. Пусть наклонная $AE > AD$; об их проэкциях BE и BD можно сделать 3 предположения: 1) $BE < BD$, 2) $BE = BD$ и 3) $BE > BD$. Легко видеть, что первое и второе предположения не годятся; следовательно, 3-е предположение должно быть справедливым. Первое обратное заключение можно получить или этим же способом, или увидать его из рассмотрения $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$.

В виду найденного свойства перпендикуляра принимают за расстояние точки от прямой отрезок перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

100. Пусть имеем две параллельных прямых a и b (чер. 108). Выберем на прямой b ряд точек A, B, C и т. д. Мы уже знаем, что за расстояние каждой из них от прямой a принимаются перпендикуляры AA', BB', CC'..., построенные чрез точки A, B, C... к прямой a. Легко увидать: 1) Если $a \parallel b$ и если $AA' \perp a$, то $AA' \perp b$, так как, напр., $\angle 1 = \angle 2$ (как внутренние накрест-лежащие при параллельных a и b и секущей AA') и, следовательно, $\angle 1 = d$ (ибо $\angle 2 = d$), 2) $AA' = BB' = CC'$ и т. д., так как, напр., $AA'B'B$ является параллелограммом (прямоугольником), откуда $AA' = BB'$. Поэтому отрезок, равный одному из построенных перпендикуляров, принимают за расстояние между двумя параллельными.



Чер. 108.

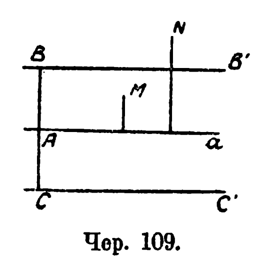
101. Где расположены точки, находящиеся на данном расстоянии от данной прямой?

Пусть дана прямая a (чер. 109). Тогда, построив $BC \perp a$ и отложив отрезки AB и AC, равные данному расстоянию, получим две точки B и C, расстояние которых от прямой a равно данному. Построив затем прямую $BB' \parallel a$ и $CC' \parallel a$, увидим, согласно

предыдущему, что все точки этих прямых BB' и CC' имеют данное расстояние от прямой a. Все остальные точки, не лежащие на построенных прямых, имеют или меньшее расстояние от прямой a (ближе к a), напр., точка M, или большее (дальше от a), напр., точка N. Поэтому имеем:

Геометрическое место точек, имеющих данное расстояние от данной прямой, есть пара прямых, параллельных данной и расположенных по обе ее стороны на одинаковом (данном) расстоянии.

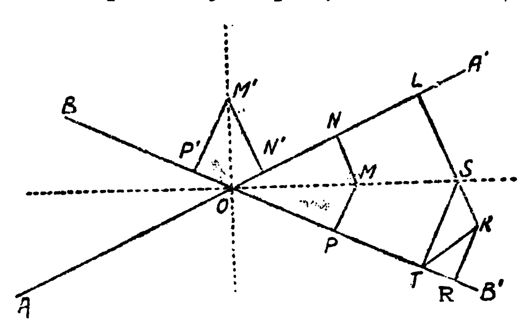
102. Теперь легко увидать, что геометрическим местом точек, равно удаленных от двух данных параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и проходящая чрез середину расстояния между ними [напр., прямая a (чер. 109) есть геометрическое место точек, равноудаленных от BB' и CC'].



Чер. 109.

103. Пусть теперь имеем две пересекающихся прямых AA' и BB' (чер. 110) и пусть точка O есть их общая точка.

При точке O имеем 4 угла; построим биссекторы этих углов (на чер. они начерчены пунктиром), — эти 4 биссектора соста-



Чер. 110.

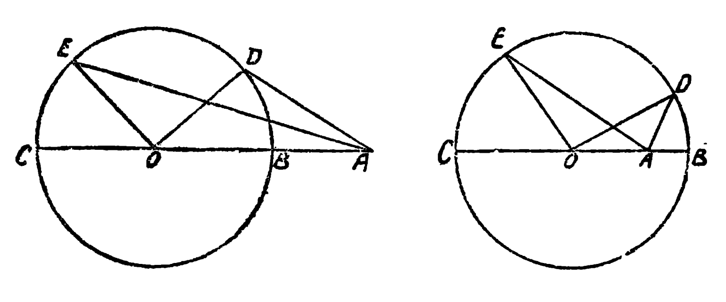
вят две взаимно перпендикулярных прямых, что легко увидать. Возьмем на одном из биссекторов какую-либо точку M и построим $MN \perp AA'$ и $MP \perp BB'$; тогда MN и MP служат рас-

стояниями точки M от прямых AA' и BB'. Рассматривая $\triangle OMN$ и $\triangle OMP$, у которых гипотенуза OM общая — треугольники прямоугольные — и $\angle MON = \angle MOP$ (ибо OM есть биссектор), найдем (n°74, 3-й признак), что $\triangle MON = \triangle MOP$ и, следовательно, $MN = MP$, т.-е. точка M одинаково удалена от прямых AA' и BB'; также найдем, что точка M' одинаково удалена от этих прямых ($M'P' = M'N'$). Если мы рассмотрим точку K, не лежащую на биссекторе OS угла $A'OB'$, то, построив $KL \perp AA'$ и $KR \perp BB'$, найдем: KL пересекает биссектор в точке S и тогда $ST = SL$ (ST есть $\perp$ к BB'), но $KR < KT$ (ибо KR перпендикуляр, а KT—наклонная), а $KT < KS + ST$ (n°90) или $KT < KS + SI$ или $KT < KL$; следовательно, и подавно $KR < KL$, т.-е. точка K, не расположенная на биссекторе, неодинаково удалена от прямых AA' и BB'. Поэтому имеем:

Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, служат биссекторы углов, образуемых этими прямыми.

Следовательно, всякая точка, равно удаленная от двух пересекающихся прямых, лежит на биссекторе одного из четырех углов, и, наоборот, всякая точка биссектора одинаково удалена от наших прямых.

104. Пусть имеем круг O и точку A вне его (чер. 111) или внутри его (чер. 112). Тогда, соединив A с O, назовем через B и C точки пе-



Чер. 111. Чер. 112.

ресечения прямой AO с кругом; соединяя точку A с различными точками D, E... круга, найдем: 1) для случая, данного на чер. 111, $AO < AD + OD$ или $AB + OB < AD + OD$, но $OB = OD$, как радиусы, следов., $AB < AD$; для случая, данного на чер. 112, имеем: $OA > OD - AD$ или $OB - AB > OD - AD$, или $-AB > -AD$, или $AB < AD$; 2) $AD < AO +$

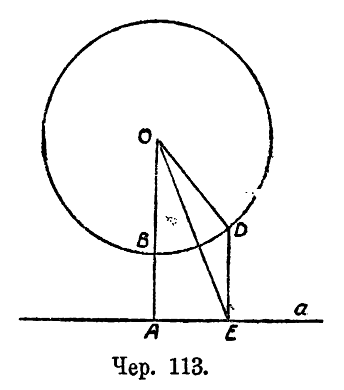
$+$ OD или, заменяя OD через OC (OD $=$ OC), AD $<$ OA $+$ OC или AD $<$ AC; 3) из рассмотрения $\triangle$ AOD и $\triangle$ AOE, у которых OA общая сторона и OD $=$ OE (как радиусы), имеем (n°87) AE $>$ AD, так как $\angle$ AOE $>$ $\angle$ AOD.

Из этого видим, что если итти по окружности от точки B к точке C; то расстояния точек окружности от точки A будут увеличиваться; наименьшим расстоянием является отрезок AB. Этот последний отрезок принимают за расстояние точки от круга. Итак,

Чтобы получить расстояние точки от круга, надо соединить точку с центром и взять тот отрезок этой прямой между данною точкою и точкою пересечения прямой с кругом, внутри которого не расположен центр.

105. Пусть имеем круг O (чер. 113) и какую-либо прямую a, неимеющую общих точек с кругом. Построим через центр круга O перпендикуляр к a, OA$\perp a$ и назовем точку пересечения прямой OA с кругом которая лежит между O и A, через B. Тогда имеем:

$$AB = OA - OB.$$



Чер. 113.

Взяв какую-либо еще точку D круга, построив DE $\perp$ a и соединив E с O, найдем из $\triangle$ ODE:

$$DE > OE - OD.$$

Но OE $>$ OA (наклонная больше перпендикуляра), OB $=$ OD (как радиусы), следов., OE—OD $>$ OA — OB. Поэтому DE $>$ BA.

Отрезок перпендикуляра BA является таким образом расстоянием между двумя наиболее сближенными точками круга и прямой и поэтому его принимают за расстояние между кругом и прямой.

106. Упражнения. 1. Каждая точка основания равнобедренного треугольника обладает свойством, что сумма ее расстояний от равных сторон одна и та же. (Здесь понадобится пользоваться свойством, что 2 высоты равнобедренного треугольника, опущенные на разные стороны, равны между собою).

2. Сумма расстояний каждой точки, расположенной внутри равностороннего треугольника, от всех его сторон есть величина постоянная.

Примечание. Если в первой задаче взять точку на продолжении основания, то разность ее расстояний от равных сторон окажется постоянной; если во второй задаче взять точку вне треугольника, то одно или два из расстояний придется взять со знаками минус.

3. Построим из точки M три луча так, чтобы углы между ними были равны между собою (каждый из них $=\frac{4d}{3}$; при построении надо

вспомнить задачу 7 из n° 76) и возьмем на них точки A, B и C. Тогда точка M среди всех остальных точек плоскости обладает свойством, что сумма ее расстояний от A, B и C есть наименьшая.

Для выяснения этого надо чрез A, B и C построить прямые соответственно перпендикулярные к MA, MB, MC — получится равносторонний треугольник.

Взяв точку M' (для простоты внутри треугольника), найдем, что сумма ее расстояний от сторон треугольника остается прежней (на основании предыдущей задачи), а, следов., сумма ее расстояний от точек A, B и C окажется больше прежней.

4. Геометрическим местом точек, расстояние которых от основания равнобедренного треугольника равно сумме расстояний их от боковых его сторон, служат 2 отрезка, заключенные между равными сторонами треугольника, неопределенно продолженными, прямых, параллельных основанию; точки же этих прямых, не лежащие внутри угла, образованного равными сторонами, обладают свойством, что расстояние их от основания равно разности расстояний от боковых сторон.

Для построения этого геометрического места следует построить биссекторы внутреннего и внешнего углов при основании равнобедренного треугольника.

5. Две вершины треугольника одинаково удалены от прямой, соединяющей третью вершину со срединой противолежащей ей стороны (от медианы).

6. Найти точку, находящуюся на данных расстояниях от данной точки и от данной прямой (наибольшее число решений 4).

7. Даны 2 параллельных прямых, пересеченных секущею. Найти точку, равно удаленную от всех трех прямых (2 решения).

8. Найти точку, равно удаленную от трех прямых, пересекающихся в трех точках (4 решения).

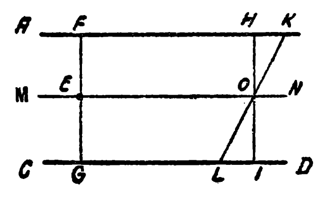
9. Дана прямая и 2 точки A и B, расположенные по одну сторону прямой. Найти на данной прямой такую точку M, чтобы лучи MA и MB были одинаково наклонены к данной прямой. Выяснить, что точка M среди остальных точек данной прямой обладает свойством, что сумма ее расстояний от A и B наименьшая.

10. Найти точку, находящуюся на данных расстояниях от двух данных кругов (предварительно надо выяснить, где расположены точки, находящиеся на данном расстоянии от одного данного круга).

ГЛАВА XI.

Средние линии треугольников и четыреугольников.

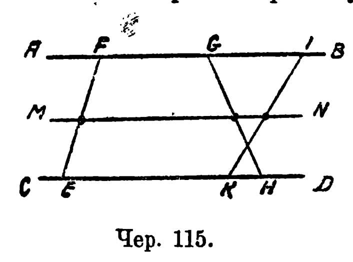
107. Мы знаем (n°.102), что геометрическим местом точек, равноотстоящих от двух данных параллельных прямых, служит средняя параллельная. Если таким образом AB и CD (чер. 114) суть две параллельные и MN для них средняя параллельная, то расстояния любой точки E этой средней параллельной от AB и CD равны между собою, т.-е., построив $EF \perp AB$ и $EG \perp CD$, получим, что $EF = EG$.



Чер. 114.

Ясно, что построенные перпендикуляры EF и EG составляют продолжение друг друга и образуют один отрезок FG, перпендикулярный к нашим параллельным AB и CD, причем этот отрезок делится среднею параллельною (в точке E) пополам. Итак, всякий отрезок, перпендикулярный к двум параллельным и заключенный между ними, делится среднею параллельною пополам.

Возникает теперь вопрос: не будет ли также делиться пополам среднею параллельною какой-нибудь отрезок KL, не перпендикулярный к AB и CD. Пусть KL пересекается с MN в точке O. Построим через эту точку O перпендикулярный к прямым AB и CD отрезок HI. Тогда $OH = OI$. Так как, кроме того, $\angle HOK = \angle IOL$, как вертикальные, то прямоугольные треугольники OHK и OIL равны, откуда следует, что $OK = OL$. Итак, оказывается, что и любой отрезок, заключенный между двумя параллельными, делится среднею параллельною пополам.



Чер. 115.

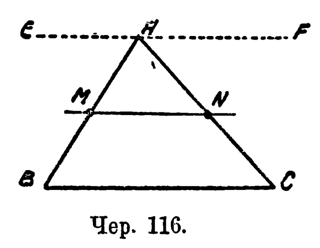
Пусть $AB \parallel CD$ (чер. 115). Построив между ними ряд каких-либо отрезков EF, GH, KI и т. д., мы, согласно предыдущему,

найдем, что середины этих отрезков лежат на средней параллельной MN. В общем итоге мы приходим к следующему заключению:

Геометрическим местом середин всевозможных отрезков, заключенных между двумя параллельными, служит средняя параллельная.

Отсюда возникают возможности различных построений средней параллельной для двух данных параллельных прямых: 1) мы можем, построив любой отрезок EF, заключенный между двумя данными параллельными AB и CD, разделить его пополам и через его середину построить прямую $MN \parallel AB \parallel CD$ — эта прямая MN и должна служить среднею параллельною, и она должна делить пополам всевозможные отрезки (напр., GH, KI и т. д.), заключенные между AB и CD. 2) Мы можем построить два отрезка, напр., EH и KI, заключенные между AB и CD, разделить каждый из них пополам и через их середины построить прямую MN — она и должна служить среднею параллельною.

108. Применим свойства средней параллельной к знакомым нам фигурам и прежде всего к треугольнику.

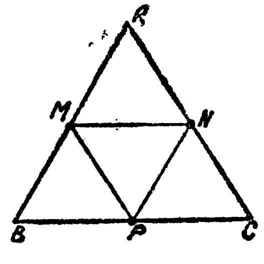


Чер. 116.

Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 116). Здесь непосредственно мы не имеем двух параллельных, но мы всегда можем их получить, напр., построив через вершину A прямую $EF \parallel BC$ (эту прямую EF можно было бы и не рисовать на чертеже, так как она существенной роли не играет в дальнейшем и так как достаточно лишь знать, что она существует). Тогда мы имеем две параллельных BC и EF и два отрезка AB и AC, заключенные между ними. Разделив их пополам в точках M и N ($AM = MB$ и $AN = NC$) и построив через M и N прямую MN, мы получим среднюю параллельную MN, т.-е. $MN \parallel BC$ (и $\parallel EF$, но это для нас не существенно). Из этого заключаем: прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна его третьей стороне.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треуг-ка, называют среднею линиею треугольника. Итак, у нас отрезок MN есть средняя линия нашего треугольника.

Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 117). Разделим пополам каждую из его сторон: пусть M есть середина AB (сл. $AM=MB$), N — середина AC ($AN=NC$) и P — середина BC ($BP=PC$); соединим точки M, N и P отрезками MN, MP и PN, — каждый из этих отрезков является среднею линиею для нашего треугольника. Таким образом в треугольнике имеется три средних линии.

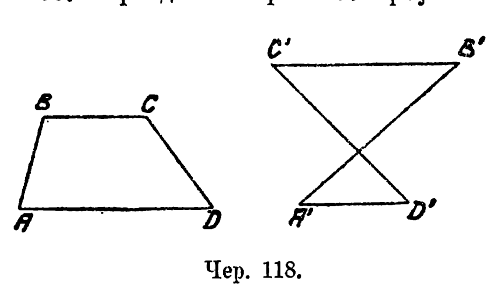


Чер. 117.

Согласно предыдущему, будем иметь: $MN \parallel BC$, $MP \parallel AC$ и $NP \parallel AB$. Поэтому $AMPN$, $BMNP$ и $PMNC$ суть параллелограммы. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то имеем: $MN=BP$ (из параллелограмма $BMNP$), но $BP=\frac{BC}{2}$ (ибо точка P есть середина BC); поэтому $MN=\frac{BC}{2}$. Также из параллелограмма $AMPN$ получим: $MP=AN=\frac{AC}{2}$ и из параллелограмма $AMPN$—$PN=AM=\frac{AB}{2}$. Отсюда заключаем:

к а ж д а я с р е д н я я л и н и я т р е у г о л ь н и к а, с о е д и н я ю щ а я с е р е д и н ы д в у х е г о с т о р о н, п а р а л л е л ь н а т р е т ь е й и р а в н а е е п о л о в и н е.

109. Перейдем теперь к четыреугольникам и остановимся сначала на таких четыреугольниках, у которых две стороны параллельны. Принято называть такие четыреугольники т р а п е ц и я м и. На чер. 118 изображены два различных вида трапеций:

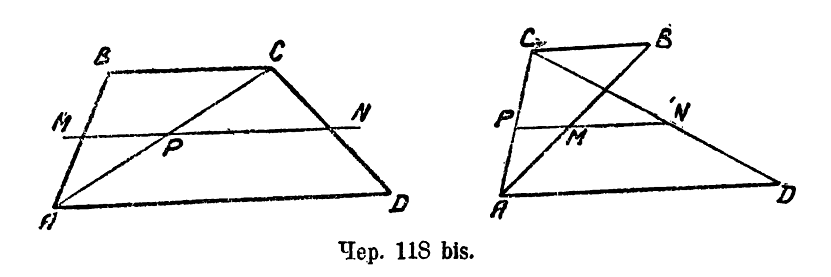


Чер. 118.

1) трапеция $ABCD$, где $BC \parallel AD$, но AB не параллельна CD, — эта трапеция имеет площадь (см. n° **79**) и 2) трапеция $A'B'C'D'$, где $A'D' \parallel B'C'$, — эта трапеция не имеет площади (n° **79**).

Рассмотрим сначала трапецию $ABCD$ (чер. 118 bis), имеющую площадь. Здесь $BC \parallel AD$. Поэтому мы имеем две параллельных

BC и AD и между ними отрезки AB и CD. Разделив эти отрезки пополам в точках M и N ($AM=MB$ и $CN=ND$) и соединив их прямою MN, получим среднюю параллельную MN для BC и AD, т.-е. $MN \parallel BC \parallel AD$. Отрезок MN этой прямой наз. среднею линиею трапеции (следует добавить: „соединяющей середины непараллельных сторон", потому что в трапеции, как и во всяком четыреугольнике, можно рассматривать 6 средних линий, что имеет место в n° 110). Итак, мы получили, что $MN \parallel BC \parallel AD$. Далее, построив диагональ AC, получим еще третий отрезок AC, заключенный между параллельными BC и AD — его середина должна лежать (n° 107) на средней параллельной, т.-е. точка P, где пересекаются MN и AC, есть середина отрезка AC. Поэтому MP есть средняя линия $\triangle$-а ABC и PN — средняя линия $\triangle$-а ACD. На основании предыдущего, имеем: $MP=\frac{BC}{2}$ и $PN=\frac{AD}{2}$. Отсюда получаем: $MN=MP+$ $+PN=\frac{BC}{2}+\frac{AD}{2}$ или $MN=\frac{BC+AD}{2}$. Итак,



Чер. 118 bis.

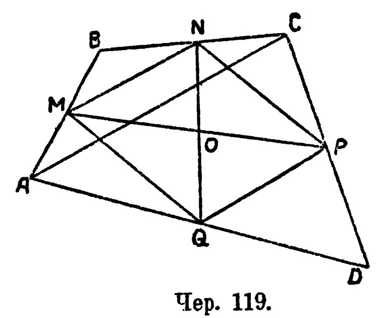
средняя линия, соединяющая середины непараллельных сторон трапеции, имеющей площадь, параллельна ее параллельным сторонам и равна их полусумме.

Пусть теперь имеем трапецию $ABCD$ (чер. 118 bis), неимеющую площади. Здесь также $BC \parallel AD$ и поэтому середины M и N сторон AB и CD лежат на средней параллельной, т.-е. здесь также имеем: $MN \parallel BC \parallel AD$. Построив диагональ AC, получим отрезок AC, заключенный между параллельными BC и AD, и его середина, точка P, должна лежать на средней параллельной. По-

этому PM есть средняя линия $\triangle$-а ABC и, след., $PM = \frac{BC}{2}$; также PN есть средняя линия $\triangle$-а ACD и, след., $PN = \frac{AD}{2}$. Так как $MN = PN - PM$, то получим $MN = PN - PM = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$ или $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Итак,

средняя линия, соединяющая середины непараллельных сторон трапеции, неимеющей площади, параллельна ее параллельным сторонам и равна их полуразности.

110. Пусть имеем какой-либо четыреугольник ABCD (имеющий площадь) — (черт. 119). Найдем середины M, N, P и Q его сторон и соединим их попарно. Получим 6 средних линий четыреугольника.



Чер. 119.

Вот свойства этих средних линий.

1) Средние линии, соединяющие середины последовательных сторон четыреугольника, образуют параллелограмм.

Для выяснения этого свойства построим диагональ AC. Тогда из $\triangle ABC$ имеем (n°108) $MN \parallel AC$ и из $\triangle ACD$ на том же основании: $PQ \parallel AC$, — следов., $MN \parallel PQ$. Построив другую диагональ BD, найдем при ее помощи, что $NP \parallel MQ$, следов., MNPQ есть параллелограмм.

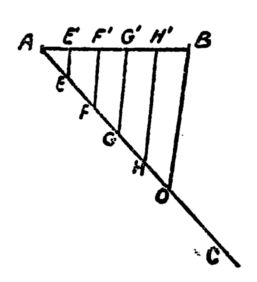
2) Средние линии четыреугольника, соединяющие середины противоположных сторон, взаимно делятся пополам.

Это свойство теперь очевидно, так как MP и NQ являются диагоналями параллелограмма.

Через точку O пересечения прямых MP и NQ проходят также прямые, соединяющие середины диагоналей AC и BD (на чертеже диагональ BD не дана). Это следует из того, что AC и BD являются сторонами четыреугольника ACBD, не имеющего площади, к которому применимо все, изложенное в начале этого n°.

111. Мы умели (nn°57, 59) делить отрезок пополам и, следов., на 4, на 8 и вообще на 2^n равных частей. Теперь мы можем разделить данный отрезок на 3, на 5 и вообще на сколько угодно равных частей.

Пусть, напр., требуется отрезок AB (чер. 120) разделить на 5 равных частей. Построим чрез точку A произвольную прямую AC (образующую с AB угол, отличный от выпрямленного) и отложим на AC пять произвольных, но равных между собою, отрезков $AE = EF = FG = GH = HO$. Построим прямую OB и через точки E, F, G и H построим прямые EE', FF', GG', HH', параллельные OB.



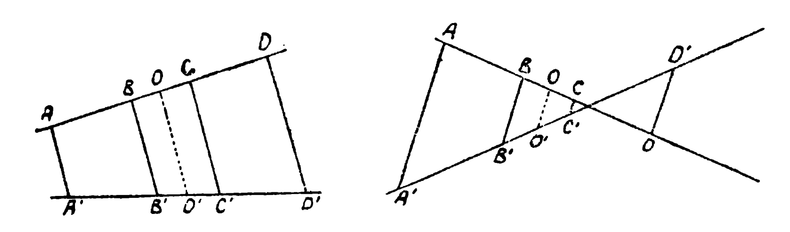
Чер. 120.

Рассмотрим $\triangle AFF'$, так как $AE = EF$, то E есть середина стороны AF и EE' (она $\parallel FF'$) есть средняя линия этого треугольника, следов., $AE' = E'F'$.

Рассмотрим затем трапецию $EE'G'G$. Так как $EF = FG$, $FF' \parallel EE' \parallel GG'$, то FF' есть средняя линия трапеции $EE'GG'$, — следов., $E'F' = F'G'$. Также найдем, что GG' есть средняя линия трапеции $FF'H'H$ и, следов., $F'G' = G'H'$ и т. д. Соединяя полученные равенства, найдем $AE' = E'F' = F'G' = G'H' = H'B'$, т.-е. отрезок AB разделился на 5 равных частей.

Из решения этой задачи можно вывести заключение:

Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и чрез их концы построить ряд параллельных прямых, то и на другой стороне угла получим равные между собою отрезки.



Чер. 120 bis.

Добавление. Мы откладывали равные отрезки на одной прямой подряд, начиная от точки пересечения двух прямых (AB и AC чертежа 120), но возможно к такому же результату притти и при ином способе отложения равных отрезков. На чертеже 120 bis дано два варианта такого построении: на прямой AD (см. чер. 120 bis

слева или справа) отложим два равных отрезка AB и CD и через их концы построим параллельные $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Затем возьмем точку O, середину отрезка BC, и построим $OO' \parallel$ $\parallel BB' \parallel CC' \parallel AA' \parallel DD'$. Тогда OO' есть средняя линия трапеции $BCC'B'$; поэтому $B'O' = O'C'$ (n°109). Так как $AB = CD$ и $BO = OC$, то AO также $= OD$; поэтому OO' есть также средняя линия трапеции $ADD'A'$ (на чертеже справа эта трапеция $ADD'A'$— не имеющая площади, см. n° 109) — и также $A'O' = O'D'$. Отсюда имеем $A'O' - B'O' = O'D' - O'C'$ (ибо и уменьшаемые и вычитаемые обеих разностей равны), или $A'B' = C'D'$. Возможны и иные комбинации (напр., отр. CD правой фигуры отодвинуть так, чтобы точка C оказалась правее точки пересечения прямых AD и $A'D'$). Общее заключение таково: **если построены две прямые, на одной из них отложены как-либо два равных отрезка и через концы их построены параллельные, то эти последние выделят и на другой прямой два равных между собою отрезка.**

112. Упражнения. 1. Чрез вершины данного треугольника построены прямые, параллельные его сторонам. Показать, что новый треугольник имеет стороны вдвое большие, чем стороны данного, и что вершины данного являются серединами сторон нового (Срав. упр. 7 из n°54).

2. Построить треугольник, если даны середины трех его сторон.

3. Построить параллелограмм, если даны середины трех его сторон.

4. Известно (n°110), что середины четырех сторон четыреугольника являются вершинами параллелограмма. Когда этот параллелограмм обращается в ромб, когда в прямоугольник, когда в квадрат?

5. Прямая, соединяющая вершину треугольника со срединою противоположной стороны (медиана) и прямая, соединяющая середины двух других сторон треугольника, взаимно делятся пополам.

6. Продолжим одну сторону треугольника на отрезок, равный этой стороне, и соединим конец отрезка со срединою другой стороны. Последняя соединяющая прямая отсекает от третьей стороны треугольника отрезок, равный $\frac{1}{3}$ этой стороны. (Построить еще прямую, параллельную последней соединяющей прямой чрез вершину треугольника, противолежащую той его стороне, которая была продолжена).

7. Если на стороне AB параллелограмма ABCD отложить отрезок $AM = \frac{1}{n} AB$ (напр., $\frac{1}{7} AB$) и соединить D с M, то DM пересечет диагональ AC в точке N так, что $AN = \frac{1}{n+1} AC$ (во взятом примере $\frac{1}{8} AC$).

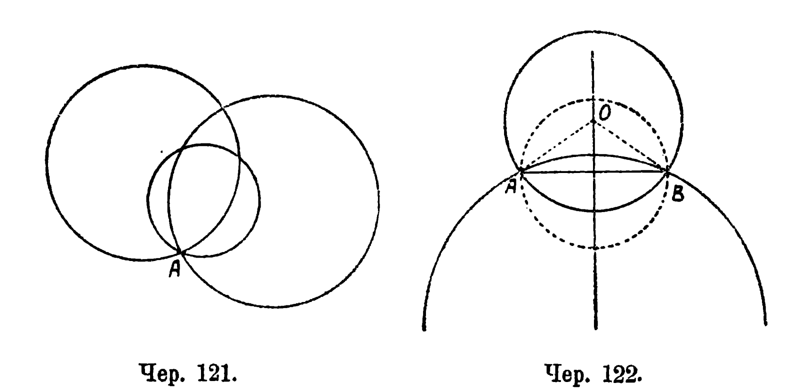
Для выяснения этого надо на продолжении стороны AB отложить $BM' = AM$ и соединить C с M'; тогда $CM' \parallel DM$, — применить n°111.

ГЛАВА XII.

Круг.

113. Мы уже знакомы с происхождением круга и с некоторыми его свойствами. Теперь надлежит пополнить наши сведения о круге более детальным его изучением. Мы знаем, что положение прямой линии определяется двумя точками. Возникает такой же вопрос о круге:

Сколькими точками определяется положение круга?



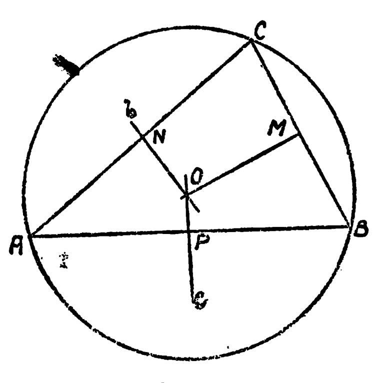
Чер. 121. Чер. 122.

Пусть имеем точку A (чер. 121); требуется построить круг, проходящий чрез эту точку. Ясно, что таких кругов можно построить бесчисленное множество (на чертеже построено 3 круга), причем центр круга можно брать где угодно, а радиус круга должен равняться расстоянию от взятого произвольно центра до точки A.

Пусть теперь имеем 2 точки A и B (чер. 122); требуется построить круг, проходящий чрез эти 2 точки. Если нам удалось найти центр O искомого круга, то отрезки OA и OB должны служить его радиусами, и, следов., $OA = OB$, т.-е. искомый центр

должен быть равноудален от точек A и B; но мы знаем, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, является перпендикуляр к отрезку AB чрез его середину. Поэтому заключаем, что чрез 2 данных точки также можно построить бесчисленное множество кругов, но центры их нельзя выбирать совсем произвольно: здесь произвол ограничен,— центры можно брать где-либо на перпендикуляре к отрезку AB чрез его середину.

Пусть теперь даны 3 точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (чер. 123); требуется построить круг, проходящий чрез A, B и C. Центр искомого круга должен быть равноудален от трех данных точек. В n°98 была предложена задача (2), в которой требуется найти точку, равноудаленную от трех данных. Дадим здесь ее решение. Мы знаем, что если соединить точки A и B и чрез середину P отрезка AB построить к нему перпендикуляр c, то на этом перпендикуляре c расположены все точки, равноудаленные от A и B. Построив также перпендикуляр b к отрезку AC чрез его середину N, найдем все точки, равноудаленные от A и C. Отсюда заключаем, что точкою, равноудаленной и от A, и от B, и от C, явится точка, принадлежащая обоим перпендикулярам. Если b и c пересекаются в точке O, то эта точка O и должна служить искомым центром. (Проверка: так как O лежит на перпендикуляре c к отрезку AB через его середину, то эта точка O одинаково удалена от A и B; так как O лежит на перпендикуляре b к отрезку AC чрез его середину, то точка O одинаково удалена от точек A и C; следовательно, точка O одинаково удалена и от A, и от B, и от C). Легко видеть, что центром может служить только одна точка (перпендикуляры b и c пересекаются только в одной точке). За радиус искомого круга мы должны принять одно из равных расстояний $OA = OB = OC$. Итак, чрез три



Чер. 123.

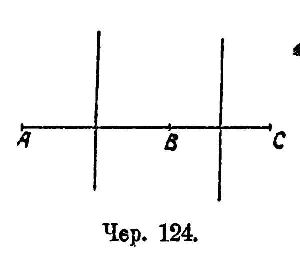
точки, не лежащие на одной прямой, можно построить только один круг.

114. Если мы соединим еще точки B и C и заметим, что точка O, будучи равноудалена от B и C, должна (n°97) лежать на перпендикуляре OM к отрезку BC чрез его середину, то придем к заключению, что

Перпендикуляры, построенные к сторонам треугольника чрез их середины, пересекаются в одной точке, которая является центром круга, описанного около треугольника.

Самый круг, проходящий чрез точки A, B и C, называется кругом, описанным около треуг-ка ABC.

115. Если данные три точки A, B и C располагаются на одной прямой (чер. 124), то, построив перпендикуляры к отрезкам AB и BC чрез их середины, мы увидим, что эти перпендикуляры не пересекаются (они параллельны, так как перпендикулярны к одной прямой,— см. n°75). Отсюда заключаем, что чрез точки A, B и C в этом случае построить круга нельзя. Итак, теперь возможно дать ответ на вопрос n°113:



Чер. 124.

Положение круга определяется тремя точками: если эти три точки не расположены на одной прямой, то чрез них можно построить круг и только один, а если три точки расположены на одной прямой, то чрез них нельзя построить ни одного круга.

116. Упражнения. 1. Найти геометрическое место центров кругов, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

2. Построить круг данным радиусом, проходящий чрез 2 данных точки.

3. Дан тупоугольный треугольник: описать около него круг. (Центр искомого круга лежит вне треугольника).

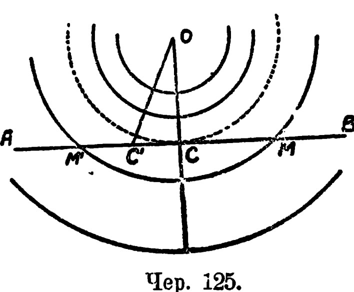
4. Дан круг (или его дуга); найти центр этого круга (или дуги).

117. Вторым вопросом, подлежащим исследованию, является:

Каковы могут быть различные случаи взаимного расположения прямой и круга?

Пусть имеем прямую AB (чер. 125) и пусть точка O, лежащая вне этой прямой, служит центром круга. Случай, когда центр круга лежит на прямой, был разобран в n°21.

Станем строить, принимая O за центр, круги различными радиусами. Построим $OC \perp AB$.



Чер. 125.

Если мы построим круги радиусами, меньшими перпендикуляра OC, то легко видеть, что все точки прямой удалены от центра O на расстояние, большее радиуса круга, и, следовательно, *круг и прямая, если радиус круга меньше перпендикуляра, опущенного из его центра на прямую, не имеют общих точек (не пересекаются)*.

Если станем строить круги радиусами, большими перпендикуляра OC, то точка C должна лежать внутри одного из таких кругов, а так как прямая AB тянется без конца, то всегда на ней можно найти точки, лежащие вне такого круга. Нам очевидно, что перейти по прямой AB от точки C, лежащей внутри круга, к точкам, лежащим вне его, можно лишь, пересекая самый круг (соображение, сходное с тем, какое дано в начале n°25), т.-е. в этом случае прямая AB пересекается с нашим кругом. Пусть точка M есть точка пересечения; тогда OM есть радиус этого круга. Отложив отрезок $CM' = CM$ по другую сторону точки C по прямой AB и соединив O с M', найдем, что $OM' = OM$, как наклонные с равными проекциями (n°99). Следовательно, окружность пересекает прямую AB еще в точке M'. Других общих точек у окружности и прямой быть не может, ибо нельзя из O построить еще наклонных к AB, равных OM и OM'. Итак, *если радиус окружности больше перпендикуляра, опущенного из ее центра на данную прямую, то эта окружность имеет с прямою две общих точки (пересекаются в двух точках)*.

Построим, наконец, окружность радиусом, равным перпендикуляру OC, тогда точка C принадлежит и кругу и прямой; но всякая другая точка C', расположенная на прямой AB, не может лежать

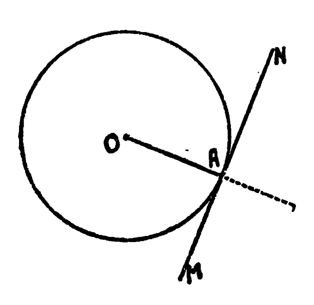
на круге: соединив C' с O, получим наклонную OC', которая больше радиуса круга OC,— следовательно, точка C' лежит вне круга. Итак, в этом случае окружность и прямая имеют только одну общую точку. Такое особенное расположение выражают словами: „круг касается прямой“, или „прямая касается круга“; прямая называется в этом случае касательной к кругу, и общая точка C называется точкою касания.

Итак, могут быть 3 случая расположения круга и прямой:

1) Круг и прямая не имеют общих точек (признак: радиус круга меньше расстояния прямой от центра), 2) круг и прямая имеют 2 общих точки (признак: радиус круга больше расстояния прямой от центра) и 3) прямая и круг касаются (признак: радиус круга равен расстоянию прямой от центра).

118. Итак,

Прямая касается круга, если ее расстояние от центра этого круга равно его радиусу.

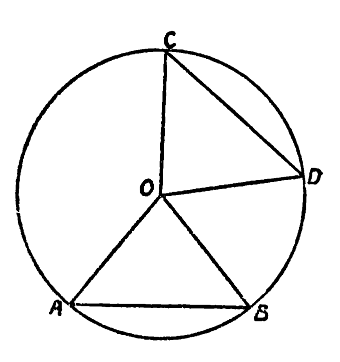


Чер. 126.

На основании этого мы можем построить касательную к данному кругу чрез одну из его точек. Пусть, напр., дан круг O (чер. 126) и точка A этого круга. Требуется построить касательную к кругу чрез точку A (очевидно, что точкою касания должна служить сама точка A). Построим радиус OA и затем прямую MN, расстояние которой от центра O равно радиусу OA, или, другими словами, прямую MN чрез точку A перпендикулярно к OA (для этого придется, согласно n°69, продолжить OA).

119. В n° 23 была установлена зависимость между дугами одного круга (или равных кругов) и соответствующими им центральными углами: равным дугам соответствуют равные центральные углы, большей дуге соответствует больший центральный угол, и обратно. Теперь, пользуясь этим, установим зависимость между дугами одного (или равных) круга и стягивающими их хордами.

Пусть имеем круг O и две дуги $\smile AB$ и $\smile CD$ (чер. 127), причем примем, что каждая дуга меньше полукруга. Соединив концы этих дуг с центром O, получим $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$. Если $\smile CD = \smile AB$, то (n° 23) и $\angle COD = \angle AOB$, а так как, кроме того, $OA = OB = OC = OD$, как радиусы, то и $\triangle AOB = \triangle COD$ и, следовательно, хорда AB = хорде CD. Если $\smile CD > \smile AB$, то $\angle COD > > \angle AOB$; тогда наши треугольники имеют по 2 равных стороны, но углы между ними не равны. Поэтому к этим треугольникам применима мысль: „против бо̀льшого угла лежит бо̀льшая сторона" (n° 87); следовательно, будем иметь: хорда $CD >$ хорды AB. Наоборот, если нам известно, что хорда $AB =$ хорде CD, то $\triangle AOB = \triangle COD$ (три стороны одного равны соответственно трем сторонам другого) и, следовательно, $\angle AOB = \angle COD$, откуда, на основании n° 23, заключаем, что $\smile AB = \smile CD$. Если имеем, что хорда $CD >$ хорды AB, то наши треугольники имеют по две равных стороны, а третьи стороны у них не равны; тогда (n° 88) против большей стороны лежит бо̀льший угол и, следовательно, $\angle COD > \angle AOB$, откуда, на основании n° 23, имеем: $\smile CD > > \smile AB$.



Чер. 127.

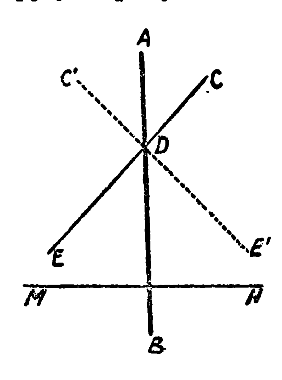
Собирая вместе результаты этих исследований, имеем:

В круге (или в равных кругах) равные дуги стягиваются равными хордами, бо̀льшая дуга стягивается большею хордою. Обратно: равные хорды стягивают равные дуги, бо̀льшая хорда стягивает бо̀льшую дугу.

120. В n° 24 мы нашли, что окружность симметрична относительно диаметра, т.-е., если перегнуть плоскость по диаметру, то одна ее часть совпадет с другою.

Чтобы найти при помощи симметрии новые свойства круга, разберем сначала вспомогательный вопрос:

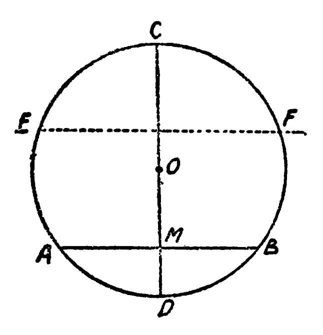
Пусть AB (чер. 128) есть ось симметрии. Построить как-либо другую прямую, чтобы она была симметрична относительно оси AB, т.-е., чтобы при перегибании плоскости по AB одна часть этой прямой совпала с другою.



Чер. 128.

Если мы построим какую попало прямую, напр., CDE, то при перегибании она займет положение $C'DE'$ так, что $\angle E'DB = \angle BDE$. Теперь легко увидать, что для того, чтобы прямая совпала сама с собою при перегибании по AB, надо построить ее так, чтобы она была перпендикулярна к AB. Если $MN \perp AB$, то AB служит осью симметрии для прямой MN.

121. Пусть имеем круг O и какую-либо хорду AB (чер. 129). Мы можем найти ось симметрии для всей фигуры, — этою осью будет служить диаметр CD, перпендикулярный к хорде AB: в самом деле, раз CD есть диаметр, то круг симметричен относительно CD, раз $AB \perp CD$, то AB (n° **120**) симметрична относительно CD. Поэтому при перегибании по CD фигура $CBMD$ должна совместиться с фигурою $CAMD$, и, следовательно, имеем: 1) $AM = MB$, 2) $\smile AD = \smile DB$.



Чер. 129.

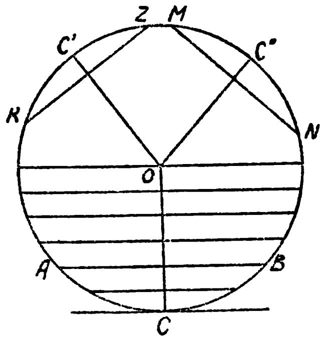
Поэтому:

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит пополам и хорду и стягиваемую ею дугу.

122. Если построим еще какую-либо хорду $EF \perp CD$ (чер. 129), то EF также симметрична относительно диаметра CD и, перегибая всю фигуру по CD, найдем: $\smile EA = \smile FB$. Так как, кроме того, мы знаем, что $EF \parallel AB$, то придем к заключению:

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

123. Пусть имеем круг O (чер. 130); построим какую-либо хорду AB и вообразим, что эта хорда перемещается параллельно самой себе (другими словами, будем строить ряд других хорд, параллельных AB). Пусть OC есть радиус, перпендикулярный к AB. Станем хорду AB удалять от центра; тогда дуга, стягиваемая хордою, станет уменьшаться, а, следовательно, и сама хорда (n° **119**) уменьшается, то-есть:



Чер. 130.

Хорда уменьшается с удалением ее от центра.

Есть две границы для расстояния хорды от центра: 1) если это расстояние равно нулю, т.-е. хорда проходит чрез центр, тогда хорда делается наибольшею и обращается в диаметр [1]); 2) если расстояние хорды от центра равно радиусу, тогда мы знаем, что прямая обращается в касательную, и сама хорда исчезает (делается равною нулю).

Пусть теперь имеем две каких-либо хорды KZ и MN (чер. 130). Пусть $OC' \perp KZ$ и $OC'' \perp MN$. Повернув всю систему рассмотренных выше хорд, перпендикулярных к радиусу OC, около центра O так, чтобы радиус OC пошел по OC' — тогда точка C совместится с C' и среди системы хорд, перпендикулярных к OC, найдется одна, которая совместится с KZ. (Построить эту хорду легко: $\smile KZ$ делится в точке C' пополам (n° **121**); отложим от C дугу, равную дуге $C'K \smile$ и построим чрез полученную точку перпендикуляр к OC). Точно так же среди нашей системы хорд можем найти одну, с которою совмещается MN, если OC совместится с OC''. Тогда 1) если хорды KZ и MN равны, то они совмещаются с одною и тою же хордою нашей системы, — следовательно, их расстояния

---

[1]) Что диаметр есть наибольшая из хорд, можно увидать, напр., из $\triangle AOB$ (чер. 127). На основании n° 90 имеем $AB < AO + OB$, т.-е. хорда меньше суммы двух радиусов, а диаметр равен сумме двух радиусов: следовательно, хорда меньше диаметра.

от центра одинаковы. 2) Если хорда MN больше хорды KZ, то MN совмещается с большею хордою, чем хорда KZ, из нашей системы, и поэтому хорда MN ближе к центру. Итак:

Равные хорды равно удалены от центра, бòльшая хорда ближе к центру.

124. 1. Построить касательную к данному кругу, параллельную данной прямой.

Надо построить диаметр, перпендикулярный к данной прямой, и чрез его концы построить к нему перпендикуляры.

Упражнения на свойства хорд и дуг и на свойства, вытекающие из симметрии круга.

2. Разделить пополам данную дугу круга.

3. Построен круг и две его хорды. Существует ли для полученной фигуры (состоящей из круга и двух хорд) ось симметрии?.. (Вообще говоря, не существует).

Как надо построить эти 2 хорды, чтобы у полученной фигуры оказалась ось симметрии? Разобрать различные возможные случаи расположения двух хорд при условии, что ось симметрии существует. Построить для каждого случая ось симметрии (особенно обратить внимание на случай, когда хорды не параллельны). Какие следствия возможно здесь получить для дуг, определяемых концами наших хорд?

4. Если построить хорду и параллельную ей касательную, то дуга, стягиваемая хордою, делится в точке касания пополам.

5. Через точку, данную внутри круга, построить хорду так, чтобы она делилась в этой точке пополам.

6. Найти геометрическое место середин равных хорд круга.

7. Построить в круге хорду, чтобы она была равна данному отрезку и параллельна данной прямой.

8. Прямые, соединяющие концы двух параллельных хорд, пересекаются на диаметре, перпендикулярном к хордам.

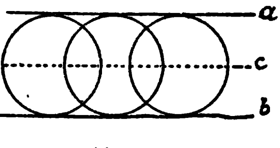
9. Построен круг и хорда AB. Продолжаем эту хорду на отрезок BC, равный радиусу круга, и чрез C строим диаметр CED. Тогда $\smile AD = 3 \smile BE$. (Соединить центр с точкою B, построить чрез B хорду $BM \parallel CD$ и чрез M построить новый диаметр MN; тогда $MN \parallel AC$ и т. д.).

125. Задача 1. Построить круг, касательный к данной прямой.

Легко видеть, что таких кругов можно построить бесчисленное множество, причем центры их можно брать где угодно; радиусом должно служить расстояние выбранного центра от данной прямой.

Задача 2. Построить круг, касательный к двум данным параллельным прямым.

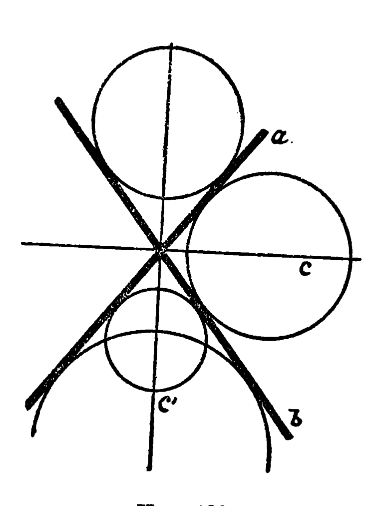
Чтобы круг касался данных прямых a и b (чер. 131), центр его должен быть равноудален и от a и от b. Но геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, служит (n° 102) прямая, параллельная данным и находящаяся на середине расстояния между ними. Построив это геометрическое место — прямую c ($c \parallel a \parallel b$), увидим, что центр искомого круга можно брать где угодно на прямой c, а радиус равен половине расстояния между параллельными a и b. Таких кругов можно построить бесчисленное множество, и все они имеют одинаковые радиусы.



Чер. 131

Задача 3. Построить круг, касающийся двух пересекающихся прямых.

Пусть даны две пересекающихся прямых a и b (чер. 132). Центр искомого круга должен быть одинаково удален от a и b. Пользуясь n° 103, найдем, что центр должен лежать на одном из биссекторов углов, составляемых прямыми a и b. Построив эти биссекторы, увидим, что любую точку их можно принять за центр искомого круга, радиус должен равняться расстоянию выбранного центра от любой из прямых a или b. Таких кругов можно построить бесчисленное множество.

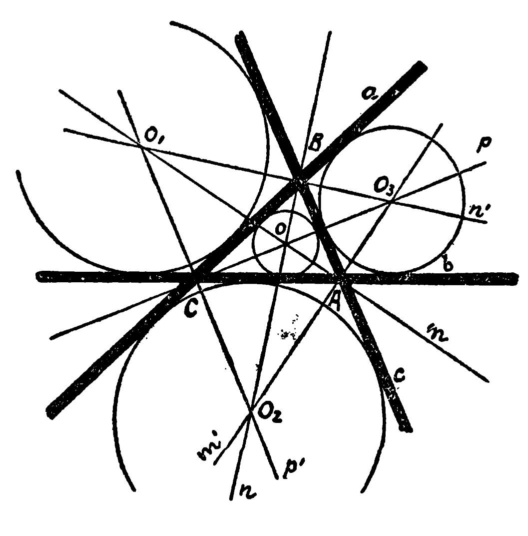


Чер. 132.

Задача 4. Построить круг, касающийся трех пересекающихся в трех точках прямых.

Пусть даны прямые a, b и c (чер. 133), пересекающиеся в точках A, B и C. Так как искомый круг должен касаться всех трех прямых, то его центр должен быть одинаково удален и от a, и от b, и от c. Построим сначала биссекторы углов, образованных прямыми a и b при точке C; пусть эти биссекторы суть p

и p'; тогда на них располагаются все точки, равноудаленные от a и b, — следовательно, и искомый центр должен лежать на одном из этих биссекторов p и p'.



Чер. 133.

Найдем также геометрическое место точек, равноудаленных от a и c, для чего построим биссекторы n и n' углов при точке B. На одном из этих биссекторов также должен лежать искомый центр. Отсюда заключаем, что центром искомого круга должна служить любая из точек пересечения первой пары (p и p') биссекторов со второю парою (n и n'). Таких точек 4: O, O_1, O_2 и O_3; одна из них O располагается внутри $\triangle ABC$, а остальные вне его. Следовательно, искомых кругов 4, радиусом каждого из них служит расстояние его центра от любой из данных прямых. Круг, центром которого служит точка O, называется кругом, вписанным в треугольник ABC; остальные три круга с центрами O_1, O_2 и O_3 называются вневписанными кругами в $\triangle ABC$.

126. Мы нашли в предыдущем n°, что точки O и O_1 одинаково удалены от всех трех данных прямых a, b и c, а, следовательно, и от двух последних b и c; поэтому точки O и O_1 должны лежать на биссекторе m внутреннего угла A треугольника ABC. Отсюда имеем:

Три биссектора внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, а именно — в центре вписанного круга.

Точки O_2 и O_3 так же одинаково удалены от прямых b и c; поэтому они должны лежать на биссекторе m' внешнего угла A треугольника ABC. Поэтому имеем:

Биссекторы внутренних и внешних углов треугольника пересекаются по три в четырех точках, служащих центрами кругов, касающихся сторон треугольника („сторону треугольника" здесь надо понимать в смысле бесконечной прямой).

127. Упражнения. 1. Построить круг, касательный к двум данным пересекающимся прямым и одной из них в данной точке (2 решения).

2. Построить круг, касательный к двум параллельным прямым и проходящий чрез точку, данную между параллельными (2 решения).

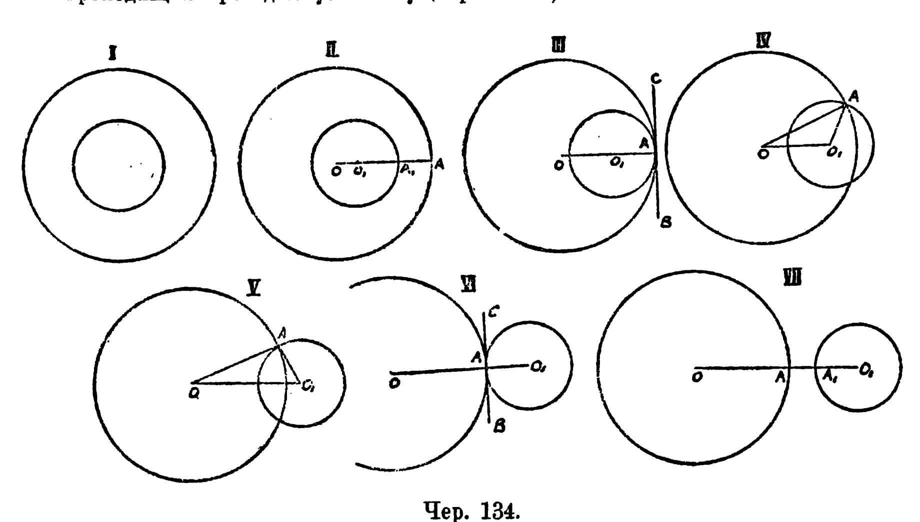
3. Даны две параллельных и секущая. Построить круг, касающийся всех трех прямых (2 решения).

4. Найти геометрическое место центров кругов, имеющих данный радиус и касающихся данной прямой.

5. Построить круг, имеющий данный радиус и касающийся двух данных пересекающихся прямых (4 решения).

6. Построить круг, проходящий чрез данную точку и касающийся данной прямой в другой данной точке.

7. Построить данным радиусом круг, касающийся данной прямой и проходящий чрез данную точку (2 решения).



Чер. 134.

128. Теперь нам предстоит рассмотреть различные случаи расположения двух кругов. В nn° 25 и 26 мы уже изучали вопрос о пересечении двух кругов, и нашли, что две общие точки двух кругов располагаются симметрично относительно линии центров. Теперь мы можем окончательно установить, что более двух

общих точек у двух кругов быть не может: в самом деле, мы знаем (n° **115**), что через три точки можно построить или один круг, или ни одного, а допущение, что два круга имеют три общих точки, повело бы к тому, что чрез 3 точки проходило бы 2 круга.

Итак, 2 круга могут иметь или две общих точки — тогда говорят, что круги пересекаются, или одну — тогда говорят, что круги касаются, или ни одной — тогда говорят, что круги не пересекаются.

Возьмем два круга, радиусы которых обозначим одною буквою каждый: R и r (причем будем считать $R > r$). Пусть наши 2 круга помещены так, что их центры совпадают (чер. 134, положение I); мы знаем, что в этом случае круги не имеют общих точек и называются концентрическими. Станем затем круг с меньшим радиусом отодвигать вправо, — перейдем к положению II; здесь один круг лежит внутри другого (общих точек у них нет), но их центры O и O_1 не совпадают. Назовем расстояние OO_1 между центрами чрез d. Мы имеем (см. положение II): $OA - O_1A_1 = OO_1 + A_1A$ или $OA - O_1A_1 > OO_1$, или $R - r > d$, или $d < R - r$; с другой стороны, очевидно, $d < R + r$.

Эти два неравенства

$$d < R - r \text{ и } d < R + r$$

служат характерною особенностью рассматриваемого положения II.

Передвигая меньший круг дальше в том же направлении, придем к положению III, в котором круги имеют одну общую точку. Прежде всего надо заметить, что эта общая точка непременно лежит на линии центров; в самом деле, предположение, что эта точка лежит вне линии центров, влечет за собой следствие, что у кругов имеется и другая общая точка, симметричная с первой относительно линии центров. Пусть эта общая точка есть A, так что OO_1A есть прямая линия. Тогда имеем: $OO_1 = OA - O_1A$ или $d = R - r$; с другой стороны, очевидно, что $d < R + r$. Поэтому для положения III имеем:

$$d = R - r \text{ и } d < R + r$$

Говорят, что в этом случае круги имеют внутреннее касание.

Передвигая круг O_1 дальше, придем к положениям IV или V, в которых круги имеют 2 общих точки. Рассматривая здесь $\triangle OO_1A$ и пользуясь nn° 90 и 91, имеем:

$$OO_1 > OA - O_1A \text{ и } OO_1 < OA + O_1A$$

или

$$d > R - r \text{ и } d < R + r.$$

Передвигая дальше круг O_1, перейдем к положению VI, в котором один круг лежит вне другого, и оба круга имеют общую точку A, лежащую на линии центров OO_1. Здесь имеем: $OO_1 = OA + O_1A$ или $d = R + r$; с другой стороны, очевидно, что $d > R - r$. Итак, для VI положения имеем:

$$d > R - r \text{ и } d = R + r.$$

Говорят, что в этом случае круги имеют **внешнее касание**.

Передвигая круг O_1 еще дальше, придем в положение VII, где круги расположены один вне другого и общих точек не имеют. Здесь имеем: $OO_1 = OA + AA_1 + A_1O_1$ или $OO_1 > OA + A_1O_1$, или $d > R + r$; с другой стороны, очевидно, что $d > R - r$. Поэтому для положения VII имеем:

$$d > R - r \text{ и } d > R + r.$$

Присоединим еще сюда, что для положения I (круги концентричны) имеем $d = O$ (это есть частный случай положения II).

Для каждого из 5 возможных случаев положения двух кругов (II, III, IV и V, VI, VII) имеется своя зависимость между расстоянием центров, суммою и разностью радиусов. Поэтому обратно: каждая из этих зависимостей может служить признаком, по которому можно судить о расположении двух кругов (см. упражнения n° 130).

129. Рассмотрим положение III и VI (чер. 134); здесь круги касаются. Если через точку касания A построим $BC \perp OA$, то будем иметь $BC \perp O_1A$ и, следовательно, BC окажется касательною и к кругу O и к кругу O_1, то-есть

Два касающихся круга имеют в точке касания общую касательную.

130. Упражнения. 1. Построена трапеция, имеющая площадь; затем построены два круга, диаметрами которых служат параллельные стороны трапеции, а расстояние между их центрами равно средней линии этой трапеции. Каково расположение этих кругов?

2. Одна из параллельных сторон трапеции, имеющей площадь, в два раза более другой. Построены 2 круга, радиусами которых служат параллельные стороны этой трапеции, а расстояние между их центрами равно средней линии этой трапеции. Каково расположение этих кругов?

3. Построена трапеция, не имеющая площади; затем построены два круга, диаметрами которых служат параллельные стороны этой трапеции, а их центры расположены на расстоянии, равном средней линии этой трапеции. Каково расположение этих кругов?

4. Построен круг; его радиус разделен на 5 равных частей и затем строят новый круг, принимая за его центр точку, отстоящую от центра на расстояние, равное $\frac{1}{5}$ радиуса первого круга, и за его радиус отрезок, равный $\frac{2}{5}$ радиуса первого круга. Каково расположение этих кругов?

5. Радиусы двух кругов равны соответственно двум сторонам данного треугольника, а расстояние между их центрами равно периметру этого треугольника. Каково расположение этих кругов?

6. Дан треугольник, стороны которого равны a, b и c. Затем построены два круга: диаметр одного из них $=$ a, диаметр другого $=$ b $+$ c и расстояние между центрами равно медиане этого треугольника, делящей пополам сторону a. Каково расположение этих кругов (см. n° 95)?

7. Если чрез точку пересечения двух кругов провести их диаметры, то концы этих диаметров лежат на одной прямой с другою точкою пересечения кругов.

8. Если 2 круга касаются, то прямая, проходящая чрез точку касания, пересекает эти 2 круга в двух таких точках, что радиусы кругов, проходящие чрез эти точки, параллельны.

131. Задачи на построение. 1. Найти геометрическое место центров кругов, касающихся двух данных концентрических кругов.

Это геометрическое место распадается на два: на одном расположены центры тех кругов, которые имеют с одним из данных внутреннее касание, а с другим — внешнее; на другом расположены центры кругов, имеющих с обоими данными внутреннее касание.

2. Даны 2 концентрические круга и точка между ними. Построить круг, касающийся обоих данных и проходящий чрез данную точку.

3. Построить круг, касающийся данной прямой и данного круга, последнего в данной точке.

Так как искомый круг касается данного, то в точке касания, которая дана, эти круги имеют общую касательную, которую можем построить. Тогда задача сведется к построению круга касательного к двум данным прямым и одной из них в данной точке.

4. Построить данным радиусом круг, касающийся данного круга и проходящий чрез данную точку.

Сначала откинем последнее требование, чтобы круг проходил чрез данную точку, и найдем, где расположены центры кругов данного радиуса, касающихся данного круга. Потом отбросим требование, чтобы круг касался данного круга и найдем, где расположены центры кругов данного радиуса, проходящих чрез данную точку. После этого легко найти центры кругов, удовлетворяющих обоим требованиям.

5. Построить данным радиусом круг, касающийся двух данных кругов.

Тот же прием, как для предыдущей задачи.

6. Построить данным радиусом круг, касательный к данной прямой и к данному кругу. (Тот же прием).

7. Построить круг, проходящий чрез данную точку и касательный к данному кругу в данной точке.

Сначала найдем геометрическое место центров кругов, касающихся данного в данной точке, затем геометрическое место центров кругов, проходящих чрез две данные точки.

8. Построить круг, касающийся данного круга и данной прямой, последней в данной точке.

9. Чрез точку пересечения двух кругов построить прямую так, чтобы получить две равных хорды.

Предположим, что задача решена; построим чрез центры кругов перпендикуляры к нашей прямой. Тогда получим трапецию, средняя линия которой вполне определена и может быть построена предварительно, — она соединяет точку пересечения кругов с серединою расстояния их центров.

ГЛАВА XIII.

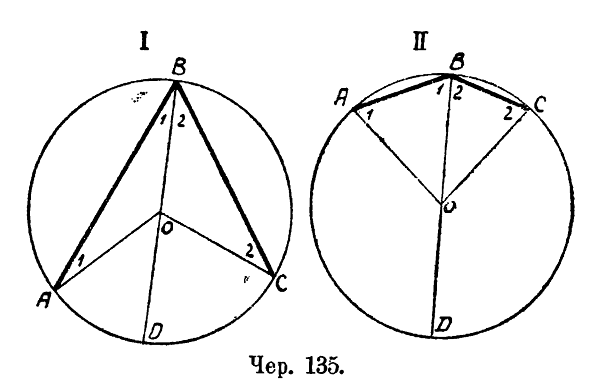
Углы в круге.

132. Мы уже знакомы с центральными углами. Построим теперь угол, вершина которого лежит на окружности и сторонами служат хорды. Такой угол называется вписанным в круг. Пусть построен $\angle ABC$ (чер. 135, I или II), вписанный вкруг O. Он опирается на дугу AC. Построим еще центральный $\angle AOC$, опирающийся на ту же дугу. Тогда между $\angle ABC$ и $\angle AOC$ существует простая зависимость. Для ее выяснения построим диаметр DB — мы будем сначала рассматривать случай,

когда этот диаметр идет внутри $\angle ABC$, — получим два равнобедренных треугольника — $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$, у которых углы при основании равны: на чертеже равные углы обозначены одним и тем же нумером, — $\angle A = \angle ABO = \angle 1$ и $\angle C = \angle CBO = \angle 2$.

Тогда $\angle AOD$ является внешним для $\triangle AOB$, и он равен сумме внутренних с ним несмежных, т.-е.

$$\angle AOD = \angle 1 + \angle 1 = 2\angle 1.$$



Чер. 135.

Также $\angle DOC$ есть внешний для $\triangle BOC$ и, следов.,

$$\angle DOC = \angle 2 + \angle 2 = 2\angle 2.$$

Отсюда сложением находим:

$\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 2\angle 1 + 2\angle 2 = 2(\angle 1 + \angle 2) = 2\angle B$, где под обозначением $\angle B$ понимаем $\angle ABC$.

Итак,

$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

или

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{\angle AOC}{2}.$$

Если одна из сторон вписанного угла проходила бы чрез центр, то дело упрощалось бы и еще скорее получилась бы та же зависимость. Например, для вписанного угла ABD имеем:

$$\angle AOD = 2\angle 1 = 2\angle ABD \text{ или } \angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{\angle AOD}{2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда диаметр BD проходит вне угла ABC (чер. 136). Тогда, согласно предыдущему, имеем:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD,$$

так как одна сторона углов ABD и CBD служит диаметром. Вычитанием находим:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \angle AOD - \frac{1}{2} \angle COD =$$

$$= \frac{1}{2} (\angle AOD - \angle COD) = \frac{\angle AOD - \angle COD}{2}.$$

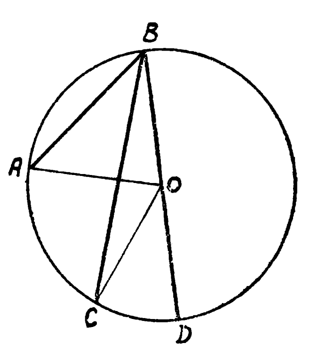
Но разность $\angle AOD - \angle COD$ равна $\angle AOC$, следовательно,

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$$

Итак, найденная зависимость справедлива для всех возможных случаев. Поэтому имеем:

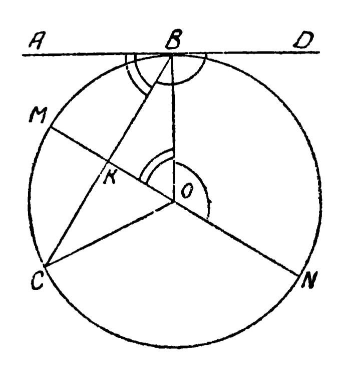
Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

133. Если хорду AB (чер. 136) вращать по направлению от BC вокруг точки B, то вписанный угол ABC станет увеличиваться, но все время будет сохраняться найденная выше зависимость между вписанным и центральным углом. Наконец, прямая AB может сделаться касательною к кругу (чер. 137) и тогда получим $\angle ABC$, составленный хордою и касательною; если касательную продолжить, то получим другой такой же $\angle DBC$. Уже из того процесса вращения, которым мы перешли от вписанного угла к этому новому углу, видно, что угол, составленный хордою и касательною, являясь предельным случаем вписанного угла, должен подчиниться той же

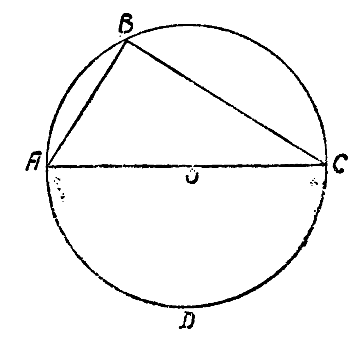


Чер. 136.

зависимости, которая была найдена в предыдущем n° для вписанного угла. Но возможно то же самое увидать иначе. Рассмотрим, например, $\angle CBD$ (чер. 137). Построим диаметр $MN \perp BC$ и соединим точку касания B с O; тогда $BO \perp AD$. Так как $\triangle KBO$ прямоугольный, то $\angle KBO + \angle KOB = d$, но $\angle ABO = d$ или $\angle ABK + \angle KBO = d$. Отсюда заключаем, что $\angle KOB = \angle ABK$, так как каждый из этих углов дополняет один и тот же $\angle KBO$ до прямого.



Чер. 137.



Чер. 138.

Но $\angle CBD =$ выпрямленному углу $- \angle ABK$ и $\angle BON =$ $=$ выпрямленному углу $- \angle KOB$. Следовательно, $\angle CBD =$ $= \angle BON = \frac{\angle COB}{2}$, где под именем $\angle COB$ надо понимать угол, бо̀льший выпрямленного и который опирается на дугу CNB. Так как $\angle CMB$ вписанный и опирается на дугу CNB, то и $\angle CMB$ равен половине того же центрального угла COB. Отсюда заключаем, что $\angle CBD = \angle CMB$. Также (еще проще) можно получить, что $\angle ABC = \angle CNB$ (углы CMB и CNB на чертеже не даны). Этот результат можно выразить в следующей форме:

Угол, составленный хордой и касательной, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную внутри первого угла.

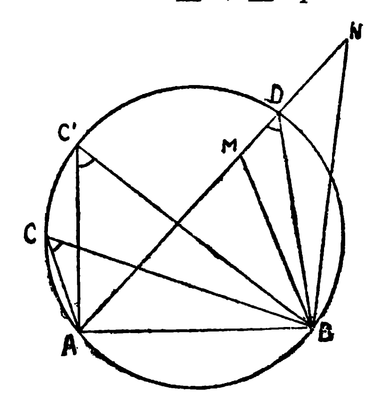
134. Построим в круге O (чер. 138) диаметр AC и какой-либо вписанный $\angle ABC$, опирающийся на полуокружность ADC или, как часто говорят, опирающийся на диаметр AC.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$, но $\angle AOC$ выпрямленный; следовательно, $\angle ABC = d$, т.-е.:

В п и с а н н ы й у г о л, о п и р а ю щ и й с я н а д и а м е т р, — п р я м о й.

135. Построим в круге какую-либо хорду AB (чер. 139) и ряд вписанных углов, опирающихся на $\smile AB$: $\angle C$, $\angle C_1$ и т. д.

Тогда каждый из этих углов равен половине центрального угла, опирающегося на дугу AB, и следовательно $\angle C = \angle C_1 = ..$.



Чер. 139.

Этот результат можно истолковать в следующей форме. Пусть в точке C помещен наш глаз, тогда лучи зрения, идущие из глаза к концам отрезка AB, составляют $\angle ACB$, — говорят, что из точки C отрезок AB виден под углом ACB. Переместим наш глаз в точку C_1; тогда отрезок AB будет виден под углом AC_1B, который равен прежнему. Вообще, в какую бы точку дуги $ACDB$ мы ни поместили наш глаз, отрезок AB будет виден все под таким же углом.

Поместим теперь наш глаз в какую-либо точку M, находящуюся внутри круга; тогда из этой точки отрезок AB будет виден под углом AMB, который уже не равен прежнему: продолжив AM до пересечения с окружностью в точке D и соединив D с B, получим $\triangle MBD$, для которого $\angle AMB$ есть внешний, и, следовательно, $\angle AMB > \angle ADB$ или $\angle AMB > \angle C$ (ибо $\angle ADB = \angle C$).

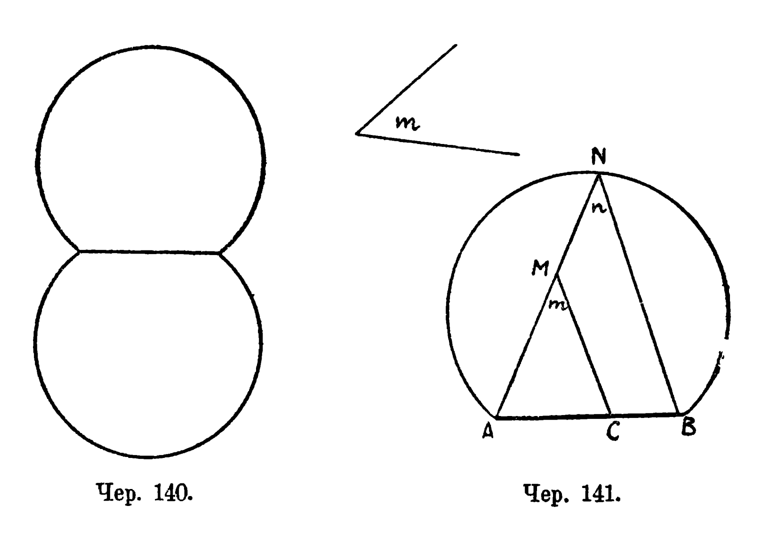
Поместим теперь глаз в какую-либо точку N вне круга. Чтобы упростить чертеж, возьмем точку N на продолжении прямой AD; тогда из точки N отрезок AB виден под углом ANB. Рассматривая $\triangle BDN$, найдем $\angle ADB > \angle N$ (ибо $\angle ADB$ внешний для $\triangle BDN$) или $\angle N < \angle ADB$ или $\angle N < \angle C$, т.-е. из внешней точки отрезок AB виден под меньшим углом, чем из точек дуги $ACDB$.

Заметим, что мы здесь должны брать точки C, M и N только по одну сторону от прямой AB.

Общим результатом предыдущих изысканий является заключение:

Геометрическим местом точек, из которых какой-либо отрезок виден под одним и тем же углом, есть дуга круга, проходящего чрез концы этого отрезка.

Если бы мы захотели рассмотреть точки и по другую сторону прямой AB, то нашли бы и с другой ее стороны такую же дугу, так что полное геометрическое место указанных точек состоит из двух дуг (см. чер. 140).



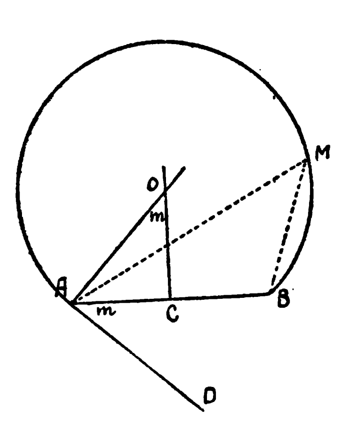
Чер. 140. Чер. 141.

136. Построить геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Пусть дан отрезок AB и угол m (чер. 141). Построить геометрическое место точек, из которых AB виден под углом m. Постараемся сначала найти одну точку этого места. Чрез точку A построим произвольный луч AN и на нем выберем произвольную точку M, при которой построим $\angle AMC = \angle m$. Тогда замечаем, что из нашей точки M виден под углом m не весь отрезок AB, а лишь его часть AC. Но теперь не трудно на луче AM найти такую точку, из которой весь отрезок AB виден под

углом m, для чего следует построить чрез точку B прямую $BN \parallel CM$, — точка N пересечения луча AN и BN и явится искомою точкою. Чтобы получить искомое геометрическое место, остается построить круг чрез точки A, N и B, что мы умеем делать (n° **113**).

Вот другой способ построения того же геометрического места. При точке A (чер. 142) отрезка AB построим $\angle BAD = m$, затем построим чрез середину отрезка AB перпендикуляр CO к этому отрезку и $AO \perp AD$; точка пересечения O этих двух перпендикуляров служит центром искомого круга; так как O лежит на CO, то круг, описанный радиусом OA, принимая O за центр, пройдет и чрез точку B; $\angle AOC = \angle BAD = \angle m$, ибо $\angle AOC$ и $\angle BAD$ каждый в отдельности дополняет $\angle OAB$ до прямого, но $\angle AOC$ есть половина центрального угла AOB; поэтому всякий вписанный $\angle AMB$ должен равняться $\angle AOC$ и, следовательно, $= \angle m$.



Чер. 142.

137. Упражнения. 1. Найти точки, из которых два данных отрезка видны под прямыми углами.

2. Найти точки, из которых два данных отрезка видны каждый под данным углом.

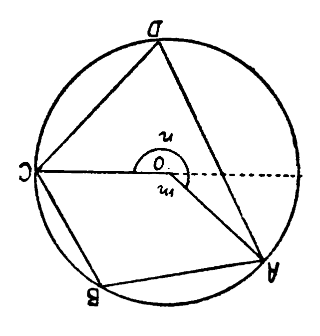
3. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и по высоте.

Треугольников, имеющих данное основание и данный противолежащий угол, можно построить бесчисленное множество: их вершины расположены на том же геометрическом месте точек, из которых данное основание видно под данным углом. Остается среди этих вершин выбрать те, которые удалены от основания на расстояние, равное данной высоте, для чего строим прямую, параллельную основанию и отстоящую от него на расстояние, равное данной высоте.

4. Построить треугольник по основанию, медиане и углу при вершине.

138. В круг O (чер. 143) впишем какой-либо четыреугольник (выпуклый), для чего возьмем 4 точки A, B, C и D круга

и соединим их по порядку прямыми. Рассмотрим полученные вписанные углы. Построив радиусы OA и OC и называя 2 полученных центральных угла m и n, а именно $\angle AOC$, опирающийся на дугу ABC, обозначим m (он меньше выпрямленного) и $\angle AOC$, опирающийся на дугу ADC, обозначим n (он больше выпрямленного), найдем:



Чер. 143.

$$\angle D = \frac{m}{2} \text{ и } \angle B = \frac{n}{2}.$$

Сложением отсюда получим:

$$\angle D + \angle B = \frac{m+n}{2},$$

но углы m и n в сумме составляют два выпрямленных угла (что легко увидать, продолжив, напр. сторону OC) или 4 прямых угла; поэтому $\frac{m+n}{2}$ = выпрямленному углу $= 2d$ и, следовательно, $\angle D + \angle B = 2d$.

То же можно получить и для суммы углов A и C. Поэтому имеем:

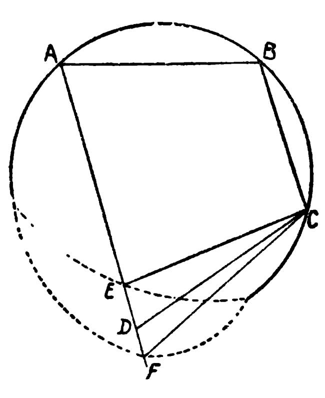
В о в с я к о м в п и с а н н о м в к р у г в ы п у к л о м ч е т ы р е у г о л ь н и к е с у м м а п р о т и в о п о л о ж н ы х у г л о в р а в н а $2d$.

Найденное свойство является н е о б х о д и м ы м признаком вписанного в круг четыреугольника, т.-е., если 4-угольник вписан в круг, то необходимо, чтобы сумма двух противоположных углов $= 2d$. Посмотрим, д о с т а т о ч е н л и этот признак для того, чтобы четыреугольник мог быть вписанным, или, другими словами, чтобы около него можно было бы о п и с а т ь круг (ведь, вообще говоря, через 4 произвольно взятых точки нельзя построить окружность, так как она определяется вполне тремя точками и может, следовательно, не пройти чрез четвертую точку).

Пусть имеем 4-угольник $ABCD$ такой, что $\angle B + \angle D = 2d$ (чер. 144). Прежде всего заметим, что тогда непременно сумма двух других углов, т.-е. $\angle A + \angle C$, тоже равна $2d$: в самом деле, мы имели (n° 81), что сумма всех четырех углов четыреугольника $= 4d$; так как $\angle B + \angle D = 2d$, то, следовательно, $\angle A + \angle C = 2d$.

Построим чрез три точки A, B и C круг, что делать умеем; возникает вопрос: пройдет ли он чрез точку D или нет? Допустим сначала, что точка D окажется вне круга и последний пересечет сторону AD в точке E. Соединив C и E, получим 4-угольник $ABCE$, вписанный в этот круг, и тогда имеем:

$$\angle B + \angle E = 2d.$$



Чер. 144.

Сравнивая это равенство с данным, что $\angle B + \angle D = 2d$, придем к заключению, что $\angle E = \angle D$ (суммы равны и одно слагаемое одинаковое, следовательно, и другие слагаемые равны), но этого быть не может, так как $\angle E$ (точнее $\angle AEC$) есть внешний для $\triangle ECD$, а $\angle D$ внутренний.

Допустим, что точка D окажется внутри круга и последний пересечет продолжение стороны AD в точке F. Тогда $\angle B + \angle F = 2d$, так как 4-угольник $ABCF$ вписанный. Сравнивая с данным равенством $\angle B + \angle D = 2d$, получим, что $\angle D = \angle F$, чего быть не может, так как $\angle D$ есть внешний, а $\angle F$ внутренний угол для $\triangle DCF$.

Остается, следовательно, принять, что круг пройдет чрез точку D и что, следовательно, около данного четыреугольника можно описать круг. Итак:

Если в выпуклом четыреугольнике сумма противоположных углов равна $2d$, то около него можно описать круг.

Четыреугольник, около которого можно описать круг, называют часто **вписываемым**.

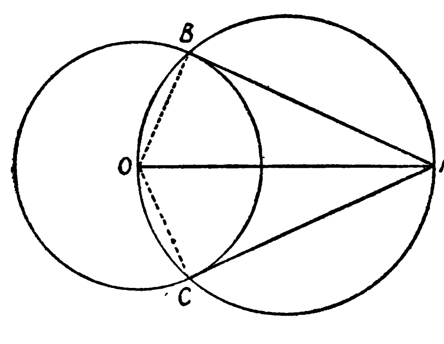
Прямое и обратное заключение этого n° можно выразить в иной форме:

Для того, чтобы выпуклый четыреугольник был вписываемым, необходимо и достаточно, чтобы сумма его двух противоположных углов равнялась $2d$.

Упражнения. 1. В каком случае около параллелограмма можно описать круг?

2. В каком случае можно описать круг около трапеции?

139. Задача. Построить касательную к данному кругу чрез точку, данную вне круга.



Чер. 145.

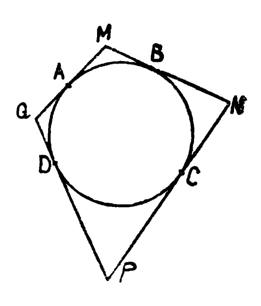
Пусть дан круг O и точка A вне его (чер. 145). Требуется чрез A построить касательную к кругу.

Соединив центр круга O с данною точкою A, примем отрезок OA за диаметр нового круга. Построив этот второй круг (его центр есть середина отрезка OA), найдем его точки пересечения B и C с первым. Тогда прямые AB и AC служат касательными из точки A к кругу O.

В самом деле, соединив B с O, получим $\angle OBA$, вписанный во второй круг и опирающийся на его диаметр OA; такой угол прямой (n°134), следовательно, $AB \perp OB$, а этого достаточно для того, чтобы прямая AB была касательной к кругу (n°118). Также выясним, что AC есть касательная к кругу O.

OA есть линия центров наших кругов, поэтому она является осью симметрии всей фигуры: перегибая фигуру по оси OA, найдем, что B совместится с C и AB с AC, т.-е. $AB = AC$. Итак, имеем:

Чрез точку, взятую вне круга, можно построить две касательных к этому кругу, и отрезки их от данной точки до точек касания равны между собою.



Чер. 146.

140. Построим треугольник, описанный около круга; для этого возьмем 4 точки A, B, C и D данного круга (чер. 146) и построим чрез эти точки касательные к кругу, точки пересечения M, N, P и Q последовательных касательных служат вершинами этого четыреугольника.

Выбор 4 точек A, B, C и D несколько ограничен: две соседних точки не должны лежать на одном диаметре круга; напр., если бы точки B и C были концами одного диаметра, то касательные в них были бы параллельны и вершины N нельзя было бы найти.

Применяя к полученному описанному 4-угольнику $MNPQ$ свойство касательных предыдущего n°, найдем:

$$MA = MB = a;\ NB = NC = b;\ PC = PD = c;\ QD = QA = d,$$

где мы ввели обозначения a, b, c и d для четырех пар отрезков, равных между собою.

Мы можем скомбинировать 8 полученных отрезков в две группы, по 4 в каждой, равных попарно отрезков. Такая комбинация напрашивается сама собою. Возьмем сумму двух противоположных сторон четыреугольника:

$$MN + PQ = MB + BN + PD + DQ = a + b + c + d.$$

Также для двух других сторон найдем:

$$QM + PN = QA + AM + NC + CP = d + a + b + c.$$

Отсюда заключаем:

$$MN + PQ = QM + PN$$

т.-е. сумма двух противоположных сторон описанного четыреугольника равна сумме двух других сторон.

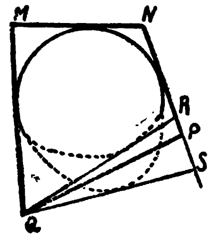
Найденное свойство является необходимым признаком описанного 4-угольника, т.-е., если 4-угольник описан около круга, то необходимо должно иметь место найденное свойство.

Посмотрим, является ли это свойство достаточным признаком для того, чтобы при его наличности этот четыреугольник мог бы быть рассматриваем, как описанный около круга, т.-е. достаточно ли этого свойства для того, чтобы в четыреугольник можно было вписать круг (вписать круг в 4-угольник значит построить такой круг, который касался бы всех четырех его сторон).

Пусть имеем 4-угольник $MNPQ$ (чер. 147), у которого

$$MN + QP = MQ + NP.$$

Построим круг, касающийся прямых MQ, MN и NP, чтобы его центр лежал внутри полосы $QMNP$ (n°125 задача 4). Возникает вопрос, коснется ли этот круг стороны QP?



Чер. 147.

Допустим, что круг не коснется стороны QP и расположится внутри 4-угольника $QMNP$. Тогда, построив чрез Q вторую касательную QR к кругу, которая пересечет сторону NP в точке R, получим описанный 4-угольник $QMNR$, для которого имеем:

$$MN + QR = MQ + NR.$$

Вычитая это равенство по частям из данного, найдем:

$$QP - QR = NP - NR \text{ или } QP - QR = RP.$$

Но это равенство противоречит свойству треугольника RPQ (n°91), согласно которому должны иметь

$$RP > QP - QR.$$

Допустим затем, что круг пересекает сторону QP. Тогда касательная к этому кругу чрез точку Q займет положение QS и пересечет сторону NP в точке S. Из описанного 4-угольника $QMNS$ имеем:

$$MN + QS = MQ + NS.$$

Вычитая отсюда данное равенство $MN + QP = MQ + NP$ по частям, получим:

$$QS - QP = NS - NP \text{ или } QS - QP = PS,$$

что опять-таки невозможно, так как из треугольника SQP имеем:

$$PS > QS - QP.$$

Поэтому остается принять, что построенный нами круг касается и стороны QP, т.-е. в наш 4-угольник удалось вписать круг. Итак:

Если сумма двух противоположных сторон выпуклого четыреугольника равна сумме двух других его противоположных сторон, то в такой четыреугольник можно вписать круг.

Четыреугольник, в который можно вписать круг, называется **описываемым**. Прямое и обратное заключения этого n° можно еще выразить в такой форме:

Для того, чтобы четыреугольник был описываемым, необходимо и достаточно, чтобы сумма одной пары его противоположных сторон равнялась сумме другой пары.

Упражнения. 1. Найти необходимый и достаточный признак того, чтобы параллелограмм был описываемым.

2. Пусть около данной трапеции можно описать круг и в нее можно вписать круг. Показать, что каждая из непараллельных сторон этой трапеции равна ее средней линии.

141. Упражнения на всю главу. 1. Свойство углов вписанного в круг 4-угольника, найденное в n° 138, можно выяснить иным способом. Построим диагональ BD (чер. 143) четыреугольника и касательную MN к кругу в точке B. Тогда $\angle ADC = \angle MBA + NBC$ (на осн. n° 133). Отсюда можно увидать, что $\angle B + \angle D =$ выпрямленному углу (на чер. 143 BD и MN не даны).

2. Геометрическим местом середин хорд, проходящих чрез данную точку внутри данного круга, служит другой круг, диаметр которого есть прямолинейный отрезок между центром данного круга и данною точкою.

3. Отрезки прямых, проходящих чрез точку пересечения двух кругов, ограниченные двумя другими точками пересечения с этими кругами, видны из другой точки пересечения кругов под одним и тем же углом.

Следует построить 2 таких отрезка и углы, под которыми они видны из другой точки; тогда можно заметить, что каждый из углов слагается из двух других углов: одно слагаемое общее и другие слагаемые равны между собою.

4. Найти точку, из которой стороны треугольника видны под равными углами.

(Надо суметь построить угол $= 1\frac{1}{3}d$).

5. Около треугольника описан круг; из какой-либо точки этого круга опущены перпендикуляры на его стороны. Основания всех трех перпендикуляров расположены на одной прямой (прямая Симсона).

Надо найти четыреугольники, около которых можно описать круги, и рассмотреть полученные вписанные углы.

6. Биссекторы внутренних углов какого-либо четыреугольника образуют, пересекаясь, вписываемый 4-угольник.

ГЛАВА XIV.

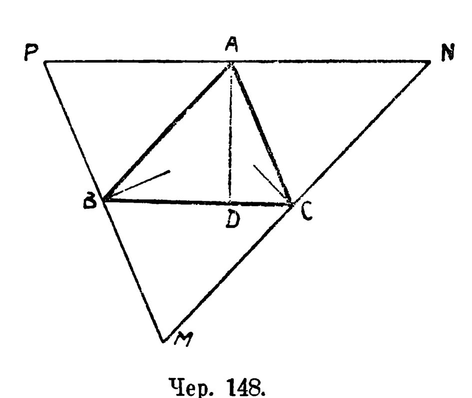
Особые точки треугольника.

142. В n° 114 мы нашли, что перпендикуляры к сторонам треугольника чрез их середины пересекаются в одной точке, а именно в центре круга, описанного около треугольника.

В n°126 мы нашли: 1) биссекторы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, а именно в центре вписанного в этот треугольник круга, и 2) биссекторы двух внешних углов треугольника и биссектор одного внутреннего угла пересекаются в одной точке, а именно в центре круга, вне-вписанного в треугольник.

Кроме этих особых точек треугольника, рассмотрим еще следующие:

143. В треугольнике ABC (чер. 148) построим его три высоты (на чертеже начерчены лишь части этих высот). Можно увидать, что они все три пересекаются в одной точке (с этим свойством мы уже встречались в n°71). Для выяснения этого чрез точку A построим прямую $PN \parallel BC$, чрез B — $PM \parallel AC$ и чрез C — $MN \parallel AB$. Тогда получим новый треугольник MNP, для которого точки A, B и C служат серединами сторон. В самом деле, $ABCN$ есть параллелограмм, — следовательно, $AN = BC$; также $ACBP$ есть параллелограмм, — следовательно, $AP = BC$, откуда вытекает, что $AN = AP$. Также выясним, что B есть середина PM и C середина MN. Высота AD нашего треугольника перпендикулярна к BC, но $PN \parallel BC$, следовательно, $AD \perp PN$; также найдем, что и другие высоты нашего треугольника соответственно перпендикулярны к MP и к MN.

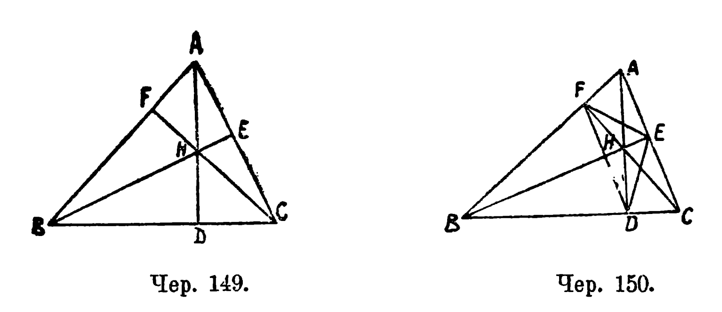


Чер. 148.

Мы видим таким образом, что высоты $\triangle ABC$ являются перпендикулярами к сторонам $\triangle MNP$ чрез их середины, а об них мы уже знаем, что они пересекаются в одной точке, а именно, в центре круга, описанного около $\triangle MNP$.

144. Интересны следующие свойства точки пересечения высот: 1) Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 149) и его высоты пересекаются в точке H. Рассмотрим затем $\triangle ABH$: легко увидать, что его высотами служат прямые AC, BC и CF, которые пересекаются в точке C. Также высоты треугольника AHC пересекаются в точке B и высоты треугольника BHC в точке A.

2) Пусть для $\triangle ABC$, у которого все углы острые (чер. 150), высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. Соединим прямыми точки D, E и F; получим $\triangle DEF$. Около 4-угольника



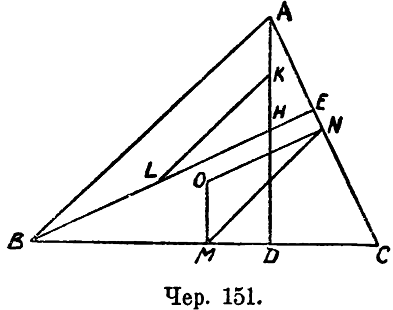
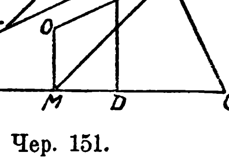
Чер. 149. Чер. 150.

$DHEC$ можно описать круг, так как $\angle HDC + \angle HEC = 2d$ (ибо каждый из этих углов прямой), тогда $\angle HDE = \angle HCE$, так как эти углы окажутся вписанными в указаннный круг, опирающимися на одну и ту же его дугу HE. Также, описав круг около 4-угольника $BFHD$ ($\angle BFH = d$ и $\angle BDH = d$), найдем, что $\angle FDH = \angle FBH$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу FH. Но $\angle HCE = d - \angle A$, так как $\triangle AFC$ прямоугольный и сумма острых его углов $\angle A + \angle FCE = d$. Также найдем, что $\angle FBH = d - \angle A$; поэтому $\angle HCE = \angle FBH$ и, следовательно, $\angle HDE = \angle HDF$, т. е. AD является биссектором внутреннего угла $\triangle DFE$. Также найдем, что BE и CF суть другие два биссектора. Поэтому точка H является центром круга, вписанного в треугольник DFE.

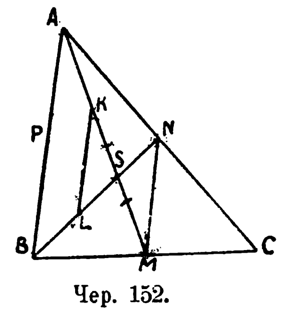
Если данный треугольник имеет тупой угол, то точка пересечения его высот лежит вне треугольника и является центром

вне-вписанного круга в треугольник, вершинами которого служат основания высот. Напр., точка C (чер. 149) — точка высот $\triangle ABH$ — служит центром вне-вписанного круга в $\triangle DEF$.

3) Пусть в $\triangle ABC$ (чер. 151) имеем $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ и точка пересечения этих высот H; затем пусть M и N середины сторон BC и AC и $MO \perp BC$, $NO \perp AC$, — тогда O есть центр круга, описанного около $\triangle ABC$. Построив отрезок MN, найдем, что он есть средняя линия $\triangle ABC$ и поэтому $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{AB}{2}$. Построим среднюю линию KL треугольника AHB; тогда $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{AB}{2}$. Отсюда заключаем, что $KL = MN$. Далее найдем, что $\angle KLH = \angle MNO$, как углы с параллельными сто-

Чер. 151.



Чер. 152.

ронами ($ON \parallel BE$, так как обе эти прямые перпендикулярны к AC) и также, что $\angle KHL = \angle MON$ по той же причине. Отсюда заключаем, что $\triangle KHL = \triangle MON$ и, следовательно, $OM = HK$, но HK есть половина отрезка AH (ибо KL средняя линия $\triangle AHB$), который называют иногда верхним отрезком высоты AD. Поэтому имеем $OM = \frac{1}{2} HA$ или $HA = 2OM$. Это свойство можно выразить в такой форме:

Точка высот треугольника отстоит от его вершины вдвое дальше, чем центр описанного круга от противоположной стороны.

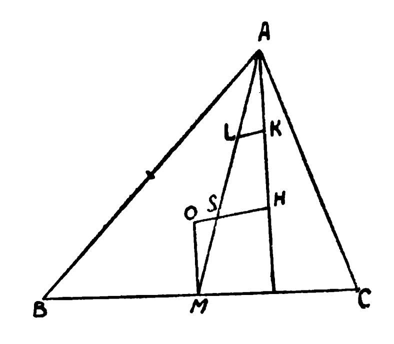
145. Построим теперь две медианы $\triangle ABC$ (медианою называется прямая, соединяющая вершину треугольника с серединою противоположной стороны), — пусть они суть AM и BN (чер. 152) и пусть их точка пересечения есть S. Построив отрезок MN —

он является среднею линиею $\triangle$ ABC, — найдем $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{AB}{2}$. Построим также среднюю линию KL $\triangle$ ASB (следовательно, K есть середина AS и L — середина BS); тогда имеем $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{AB}{2}$. Отсюда заключаем, что $MN = KL$. Нетрудно видеть, что $\triangle SMN = \triangle SKL$, так как у них $MN = KL$, $\angle N = \angle L$ и $\angle M = \angle K$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных. Следовательно, $SM = KS$, но $KS = AK$ (K середина AS), — следовательно, $SM = SK = AK$ или $SM = \frac{AM}{3}$, т.-е. медиана BN отсекает от медианы AM ее третью часть; также $SN = \frac{1}{3} BN$. Если теперь построить третью медиану CP треугольника ABC, то и она должна отсечь от AM отрезок, равный $\frac{1}{3} AM$, т.-е. должна пройти чрез ту же точку S. Итак:

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем отрезок каждой медианы от этой точки до стороны треугольника равен $\frac{1}{3}$ всей медианы.

Точка пересечения медиан называется центром тяжести этого треугольника.

146. Три точки: центр описанного круга, точка высот (иногда ее называют *ортоцентр*) и центр тяжести треугольника имеют связь, которую теперь выясним. В $\triangle$ ABC (чер. 153) пусть AH есть высота и H точка высот, O — центр описанного круга и OM $\perp$ BC (M середина BC). Тогда AM есть медиана треугольника. Соединим O и H — пусть S есть точка пересечения AM и OH — и построим KL, среднюю линию $\triangle$ AHS; тогда KL $\parallel$ SH и, следов., $\angle$AKL $=$ $\angle$AHO $=$ $=$ $\angle$SOM (последнее равенство справедливо потому, что AH $\parallel$ OM). Кроме того, имеем $\angle$ SAH $=$ $\angle$ SMO (как внутренние накрест-лежащие при параллельных AH и OM и секущей AM) и AK $=$ OM, так как AK $= \frac{1}{2}$ AH и OM $= \frac{1}{2}$ AH (n° 144;



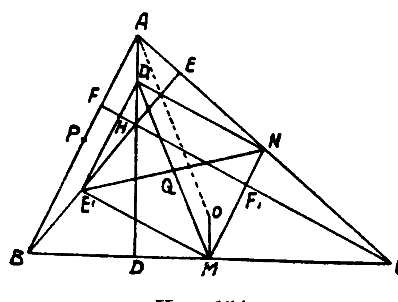
Чер. 153

3-е свойство). Поэтому $\triangle$ AKL = $\triangle$ MOS и, следов., AL = MS, но AL = LS (ибо KL средняя линия $\triangle$ AHS), — следов., $SM = \frac{1}{3} AM$, т.-е. точка S есть центр тяжести треугольника.

Кроме того, имеем: $OS = LK = \frac{1}{2} SH$. Поэтому

Центр тяжести треугольника лежит на прямой, соединяющей центр описанного круга с точкою пересечения высот, причем его расстояние от центра описанного круга вдвое меньше, чем от точки высот.

147. Пусть дан $\triangle$ ABC (чер. 154) и точки M и N суть середины сторон BC и AC; затем пусть точка H есть точка пересечения высот AD, BE и CF и точки D_1 E_1 и F_1 середины верхних отрезков высот. Соединим точки N и D_1; тогда ND_1 есть средняя линия $\triangle$ ACH и, следовательно, $D_1N \parallel CF$, но $CF \perp AB$ и, следов., $CF \perp MN$, поэтому и $ND_1 \perp MN$. Соединив точку D_1 с M и рассматривая 4-угольник DD_1NM, заключим, что около него можно описать круг ($\angle D_1DM = d$ и $\angle D_1NM = d$), центр которого должен быть расположен в середине отрезка D_1M, в точке Q.



Чер. 154.

Мы также найдем, что $ME_1 \perp MN$, но E_1D_1 есть средняя линия $\triangle$ AHB и, следов., $E_1D_1 \parallel AB \parallel MN$, откуда заключаем, что E_1D_1NM есть прямоугольник и, следов., его другая диагональ E_1N проходит чрез середину первой—чрез точку Q и $E_1N = D_1M$. Но E_1N есть диаметр круга, проходящего чрез E, N, M, E_1 (подобно тому, как D_1M есть диаметр круга, проходящего чрез D, D_1, N и M). Рассуждая так же, мы придем к заключению, что PF_1 служит диаметром круга, проходящего чрез точки M, P, F, D_1, E и F_1, и PF_1 пройдет чрез ту же точку Q. Отсюда несколько заключений:

1. Отрезки, соединяющие середину каждой стороны треугольника с серединою верхнего отрезка соответствующей высоты, все три равны между собою и пересекаются в одной точке.

2. Девять точек: середины сторон треугольника, основания его высот и середины верхних отрезков высот лежат на одном круге, центром которого служит выше найденная точка.

Этот круг называется кругом девяти точек или кругом Эйлера.

3. Радиус круга девяти точек вдвое меньше радиуса круга, описанного около данного треугольника.

Если O есть центр круга, описанного около $\triangle$ ABC, то $MO = AD_1$, откуда следует, что $MD_1 = OA$, т.-е. диаметр круга Эйлера равен радиусу круга, описанного около $\triangle$ ABC.

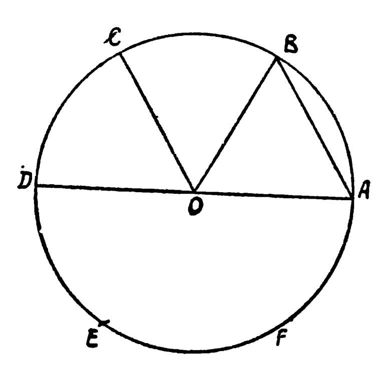
Можно далее найти, что точка Q (центр круга Эйлера лежит в середине отрезка HO, соединяющего точку высот с центром описанного круга. Надо рассмотреть $\triangle HQD_1$ и $\triangle OQM$; у них: $D_1Q = QM$, $D_1H = MO$ и $\angle HD_1Q = \angle QMO$ — следов., эти треугольники равны, откуда следует, что линия HQO прямая и что $HQ = QO$.

ГЛАВА XV.

Деление окружности на равные части и правильные многоугольники.

148. Мы знаем, что окружность делится пополам всяким диаметром. Если построить 2 взаимно перпендикулярных диаметра, то при центре получим 4 прямых угла, но равным центральным углам соответствуют равные дуги (n°23), и, следовательно, окружность разделится на 4 равных части. Построив биссекторы этих прямых углов, разделим окружность на 8 равных частей; далее на 16 и т. д., — вообще, мы можем разделить окружность на 2^n равных частей.

Легко найти способ деления круга на 6 равных частей. Так как сразу не видим решения этой задачи, то подвергнем ее исследованию.



Чер. 155.

Допустим, что задача решена и окружность разделена на 6 равных частей, одна из которых есть $\smile AB$ (чер. 155). Соединив точки деления с центром, получим равные центральные углы. Построив радиусы OA и OB и хорду AB, мы видим: 1) $\angle AOB = \frac{1}{3}$ части выпрямленного угла $= \frac{1}{3} \cdot 2d = \frac{2}{3}d$, 2) $\triangle AOB$ равнобедренный и, следовательно, $\angle A = \angle B$. Так

как сумма углов треугольника равна $2d$, а $\angle AOB = \frac{2}{3}d$, то $\angle A + \angle B = 2d - \frac{2}{3}d = \frac{4}{3}d$. Так как углы A и B равны, то каждый из них $= \frac{2}{3}d$. Таким образом оказывается, что все три угла в $\triangle AOB$ равны между собою, откуда следует, что и стороны равны, т.-е. $AB = OA$. Следовательно, хорда, стягивающая шестую часть окружности, равна радиусу. Строить хорды, равные радиусу, мы можем помощью циркуля, поэтому можно делить окружность на 6 равных частей.

Взяв точки деления чрез одну, разделим окружность на 3 равных части. Разделив пополам углы AOB, AOC и т. д., разделим окружность на 12 равных частей, затем на 24 и т. д., — вообще, можно разделить окружность на $3 \cdot 2^n$ равных частей.

Впоследствии научимся делить окружность на 5, 10, 20 и т. д., на 15, 30, 60 и т. д. равных частей.

Вопрос о делении окружности на равные части имеет важное практическое значение. Но геометр Гаусс (живший в первой половине XVIII века) доказал, что геометрическими средствами т.-е. помощью циркуля и линейки, можно делить окружность на такое число равных частей, которое выражается формулою: $2^n \cdot (2^{n_1}+1)\ (2^{n_2}+1)\ (2^{n_3}+1) \ldots$, причем множители $(2^{n_1}+1)$, $(2^{n_2}+1)$ и т. д. должны быть числами простыми и все между собою различны. Напр., можно разделить окружность на 204 равных части, ибо $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 2^2(2^1+1) \cdot (2^4+1)$, но нельзя разделить окружность на 9 равных частей, ибо здесь множитель 3 повторяется два раза.

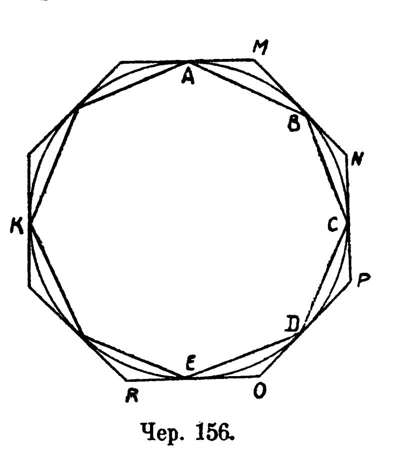
Существуют механические способы для деления окружности с очень большою точностью на сколько угодно равных частей.

Упражнение. Даны концы отрезка. Построить помощью циркуля, не пользуясь линейкой, концы вдвое большего отрезка.

149. Пусть окружность в точках A, B, C, D и т. д. (чер. 156) разделена на несколько равных частей. Соединим эти точки хордами, каждую с соседней; тогда получим выпуклый многоугольник, вписанный в круг. Не трудно увидать особенности этого многоугольника: 1) у него все стороны между собою равны, так как равные дуги стягиваются равными хордами (n°119) и 2) у него все внутренние углы равны между собой, так как эти углы впи-

санные и опираются на равные дуги: каждый опирается на дугу, равную всей окружности без двух ее частей, например, $\angle C$ опирается на $\smile BAKED$, которая равна всей окружности без двух частей $\smile BC$ и $\smile CD$, а вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу; центральные же углы, опирающиеся на равные дуги, равны.

Выпуклый многоугольник, обладающий найденными двумя особенностями (все стороны равны, и все углы равны), называется **правильным**. Следовательно, мы построили правильный вписанный в круг многоугольник.



Чер. 156.

Если в точках A, B, C и т. д. деления окружности на равные части построить касательные, то, принимая точки пересечения каждой касательной с двумя соседними за вершины, получим выпуклый многоугольник $MNPQR$..., описанный около круга. Этот многоугольник также правильный. В этом убедимся, рассматривая треугольники AMB, BNC, CPD и т. д. Все эти треугольники равнобедренные: например, в $\triangle AMB$ имеем $\angle A = \angle B$, так как каждый из них равен одному и тому же вписанному углу, опирающемуся на $\smile AB$ (n°133), откуда заключаем, что $MA = MB$. Кроме того, все наши треугольники равны между собою, так как у них имеется по одной равной стороне $AB = BC = CD = \ldots$ и углы, прилегающие к ним, равны, так как $\smile AB = \smile BC = \smile CD = \ldots$ Из равенства треугольников заключаем, что $\angle M = \angle N = \angle P = \ldots$ и, кроме того, $AM = MB = BN = NC = CP = \ldots$, откуда видим, что каждая сторона описанного многоугольника состоит из двух равных отрезков ($MN = MB + BN$, $NP = NC + CP$ и т. д.),—следовательно, все стороны этого многоугольника равны между собою, то-есть $MN = NP = \ldots$ Оба признака правильного многоугольника выполнены.

Итак, мы умеем в круг вписать и около него описать правильные многоугольники, число сторон которых есть такое, на сколько равных частей мы умеем делить окружность.

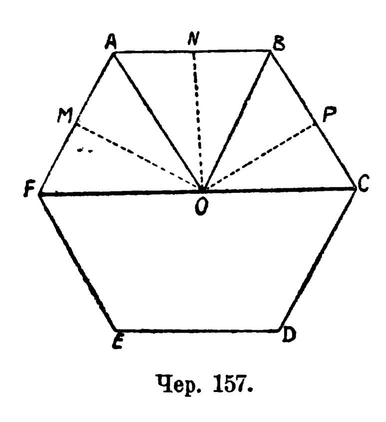
150. Упражнения. 1. Построить правильный 4-угольник (квадрат), описанный около круга. Сторона этого квадрата равна диаметру круга.

2. Построить правильные вписанные в круг 6-угольник и 12-угольник.

3. Построить вписанный в круг и описанный около него правильные треугольники. Сторона правильного описанного треугольника в 2 раза больше стороны вписанного.

4. Построить правильный звездчатый 8-угольник, разделив окружность на 8 равных частей и соединяя точки деления чрез две (например, на чер. 156 A с D и т. д.).

151. Возможно предположение, что правильный многоугольник построен как-либо иначе без помощи окружности. Тогда возникает вопрос, возможно ли около него описать и в него вписать окружности.



Чер. 157.

Пусть имеем правильный многоугольник $ABCDEF$ (чер. 157), следовательно, у него все стороны и все углы равны между собой. Разделим 2 его угла, напр., $\angle A$ и $\angle F$ пополам, пусть биссекторы OA и OF этих углов пересекаются в точке O. Соединим еще O с B и рассмотрим $\triangle FOA$ и $\triangle OAB$; у них сторона OA общая, $AF = AB$, как стороны правильного многоугольника, углы между ними равны, потому что OA есть биссектор угла A. Отсюда заключаем, что $OB = OF = OA$ (последнее равенство справедливо потому, что в $\triangle OFA$ углы при точках F и A равны, как половины равных углов многоугольника $ABCDEF$). Далее видим, что $\angle ABO = \angle AFO$ и равен, следовательно, $\frac{1}{2}$ угла B многоугольника, т.-е. OB есть биссектор угла B. Соединив O с C, также найдем, что $OC = OB = OA = OF$ и т. д. Следовательно, если примем O за центр и построим круг радиусом OA, он пройдет чрез все вершины многоугольника $ABCDEF$. Отсюда заключаем, что около всякого правильного многоугольника можно описать круг.

После этого стороны нашего многоугольника можно рассматривать, как равные хорды построенного круга, но мы знаем, что

равные хорды равно удалены от центра, т.-е. перпендикуляры *OM*, *ON*, *OP*, опущенные из *O* на стороны многоугольника, все равны между собою. Построив, принимая *O* за центр, круг, радиусом *OM*, найдем, что он пройдет чрез точки *M*, *N*, *P* и т. д. и что каждая сторона *AF*, *AB*, *BC* и т. д. будет касательною к этому кругу. Мы можем теперь утверждать, что во всякий правильный многоугольник можно вписать круг.

Общий центр кругов вписанного и описанного называют центром правильного многоугольника. Его можно найти построением биссекторов двух углов многоугольника или построением перпендикуляров к двум сторонам чрез их средины, или построением биссектора одного угла и перпендикуляра к одной стороне из ее середины.

Радиус *OA* описанного круга называют радиусом правильного многоугольника. Радиус *OM* вписанного круга называют апофемою правильного многоугольника.

ГЛАВА XVI.

Площади и равновеликие многоугольники.

152. До сих пор мы занимались сравнением отрезков, углов и дуг круга. Теперь обратим внимание на то, что мы умеем строить многоугольники, выделяющие из плоскости ее определенную часть, многоугольники, имеющие площадь. Возникает потребность установить возможность узнавать, когда две́ площади равны, или когда одна из них больше другой.

Площадью вообще называется определенная, ограниченная со всех сторон, часть плоскости.

Если две площади совпадают при наложении, то они, подобно отрезкам и углам, признаются нами равными. Если два многоугольника равны (т.-е. совпадают при наложении), то и площади их равны.

Мы легко можем составить представление о возможности находить сумму и разность площадей. Пусть имеем два многоуголь-

ника (чер. 158) I и II. Мы можем построить многоугольник *BCDE*, равный II так, чтобы одна его сторона пошла по стороне *BF* многоугольника *ABFGH*, который равен многоугольнику I. Тогда получим новый многоугольник *ABCDEFGH*, площадь которого слагается из площадей I и II многоугольников, то-есть

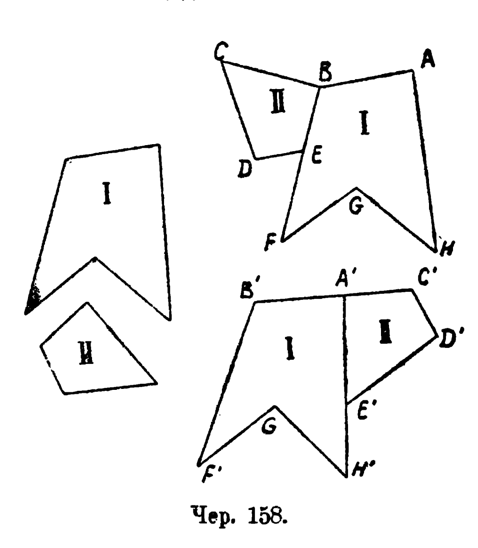
площ. *ABCDEFGH* = площ. I + площ. II

Мы можем выполнить сложение этих же двух площадей иначе и придем, напр., к многоугольнику *A'B'F'G'H'E'D'C'*, о котором также имеем:

площ. *A'B'F'G'H'E'D'C'* = площ. I + площ. II,

Для того, чтобы получилось согласие с привычною для нас мыслью, что сложение ведет лишь к одному результату, мы должны признать, что два полученные результата одинаковы, то-есть:

площадь *ABCDEFGH* = площ. *A'B'F'G'H'E'D'C'*.



Чер. 158.

Таким образом, является возможность строить многоугольники, не равные между собою (многоугольник *A'B'F'G'H'E'D'C'* вообще не равен многоугольнику *ABCDEFGH*, так как при наложении они, вообще говоря, не могут совпасть: например, может случиться, что у одного из них сторон меньше, чем у другого — на чертеже, напр., $\angle C'A'B'$ может оказаться выпрямленным), но площади которых мы признаем равными.

Не трудно также установить возможность вычитания площадей; напр., многоугольник *ABCDEFA* (чер. 159) имеет площадь, равную разности площадей 4-угольника *ABCDA* и треугольника *AFE*. Ясно, что вычитание можно выполнять так же, как и сложение, разными способами и что результаты вычитания мы

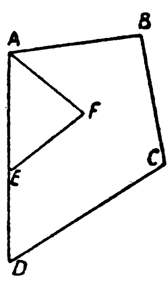
должны, каким бы способом мы это вычитание ни выполнили, считать одинаковыми. Поэтому мы можем установить:

Две площади, ограниченные прямыми линиями, считаются равными не только тогда, когда они при наложении совмещаются, но и тогда, если каждая из них является суммою или разностью двух (или нескольких) площадей, совпадающих попарно при наложении.

Мы рассматриваем только площади, ограниченные прямыми линиями.

Если же одна площадь слагается из частей так, что из них не только можно составить другую площадь, но и остаются лишние части, то первая площадь больше второй.

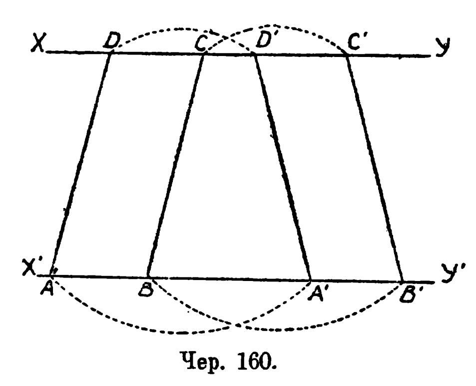
Два многоугольника, не равные между собою, но имеющие равные площади, называются **равновеликими**. На чер. 158 мы получили многоугольник $A'B'F'G'H'E'D'C'$ равновеликий многоугольнику $ABCDEFGH$.



Чер. 159.

153. Рассмотрим один пример равновеликих многоугольников, важный для последующего.

Построим два параллелограмма с одинаковыми основаниями и высотами. Это построение легко выполнить: Строим две параллельных прямых XY и $X'Y'$ (чер. 160) и на них отрезки $AB = A'B' = DC = D'C'$; построив затем отрезки AD, BC, $A'D'$ и $B'C'$, получим два параллелограмма $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с равными основаниями ($AB = A'B'$) и с равными высотами, так как прямые XY и $X'Y'$ параллельны (n° 55).



Чер. 160.

Рассмотрим 2 трапеции $AA'D'D$ и $BB'C'C$. Так как $AB = A'B'$, то $AA' = BB'$ и также $DD' = CC'$, т.-е. параллельные стороны наших трапеций соответственно равны; непараллельные

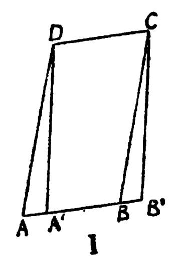
их стороны также равны: $AD=BC$ и $A'D'=B'C'$. Кроме того, не трудно убедиться в равенстве соответствующих углов $\angle DAA'=\angle CBB'$, $\angle AA'D'=\angle BB'C'$ и т. д., как соответственных при параллельных. Если передвинуть вторую трапецию так, чтобы точка B попала в A и сторона BB' пошла бы по AA', то в силу равенства сторон и углов нетрудно убедиться, что наши 2 трапеции равны. Далее мы видим:

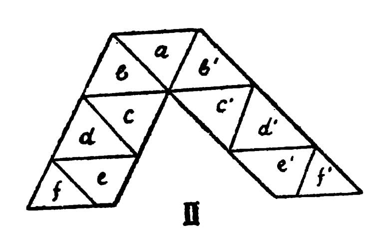
площ. $ABCD=$ площ. $AA'D'D-$ площ. $BA'D'C$
площ. $A'B'C'D'=$ площ. $BB'C'C-$ площ. $BA'D'C$,

т.-е. площадь каждого параллелограмма является разностью двух совпадающих при наложении площадей, а поэтому

площ. $ABCD=$ площ. $A'B'C'D'$.

Более наглядное объяснение: для получения площади параллелограмма $ABCD$ надо от площади трапеции $AA'D'D$ отрезать





Чер. 161.

площадь $BA'D'C$, а для получения площади параллелограмма $A'B'C'D'$ надо от площади трапеции $BB'C'C$ отрезать ту же площадь $BA'D'C$; оба раза от равных площадей отрезать одну и ту же площадь, — поэтому и остатки равны.

Вот другой способ для выяснения равенства площадей параллелограммов, имеющих равные основания и высоты.

Построим два параллелограмма $ABCD$ и $A'B'CD$ (чер. 161—I) так, чтобы их равные (верхние, например) основания совпали (CD — их общее верхнее основание). Вследствие равенства их высот, противоположные стороны AB и $A'B'$ располагаются на одной прямой. Тогда видим, что $\triangle ADA'=\triangle BCB'$ (так как $AD=BC$, $A'D=B'C$ и $\angle ADA'=\angle BCB'$) и что

$$\text{площ. } ABCD = \text{площ. } A'BCD + \text{площ. } AA'1.$$
$$\text{площ. } A'B'CD = \text{площ. } A'BCD + \text{площ. } BCB'.$$

Слагаемые наших сумм попарно равны, отсюда заключаем, что

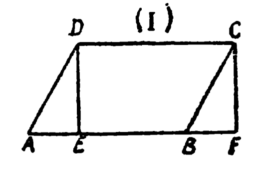
$$\text{площ. } ABCD = \text{площ. } A'B'CD.$$

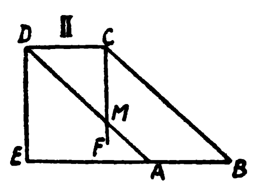
То же самое можно выразить образно: отрезав от площади $ABCD$ площадь ADA' и приставив отрезанную часть с другой стороны в положение BCB' (ведь $\triangle BCB' = \triangle ADA'$), получим площадь параллелограмма $A'B'CD$.

Но иногда одним разрезом обойтись нельзя. На чер. 161 (II) дан более сложный случай, где придется площадь левого параллелограмма разрезать на части a, b, c, d, e и f и перенести их в положения b', c', d' e' и f' (a останется на месте), — тогда составится площадь правого параллелограмма. Разрезать площадь одного параллелограмма надо по прямым параллельным сторонам другого параллелограмма (параллелограммы располагаются так, как на чер. II).

Рекомендуется вырезать два параллелограмма с равными основаниями и равными высотами из разноцветной бумаги и разрезать площадь одного на такие куски, чтобы из них составить площадь другого.

Не трудно убедиться, что если основания у двух параллелограммов равны, а высоты нет, то площадь того параллелограмма больше, у которого больше высота.





Чер. 162.

154. Прямоугольник представляет частный вид параллелограмма. Поэтому:

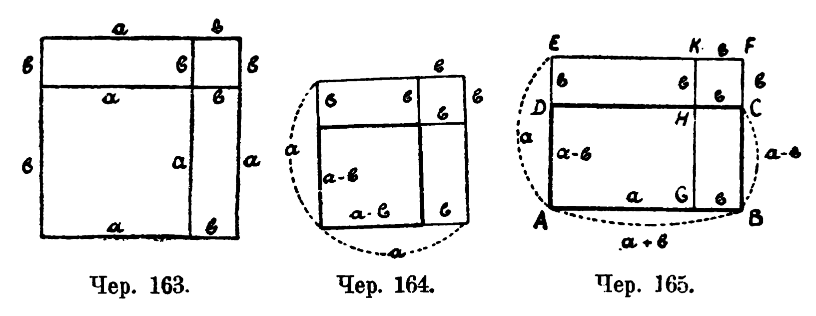
Параллелограмм равновелик прямоугольнику, имеющему такие же основание и высоту.

Превращение параллелограмма в равновеликий ему прямоугольник можно выполнить так: из вершин D и C параллелограмма $ABCD$ (чер. 162 — I или II) опускаем перпендикуляры DE и CF на сторону AB. Тогда получим прямоугольник $DEFC$, равновеликий, в силу предыдущего, данному параллелограмму.

Полезно увидать равновеликость параллелограмма прямоугольнику непосредственно, не ссылаясь на предыдущий n°; напр., для случая, данного на чер. II, имеем: после построения $DE \perp EB$

к площади $ABCD$ мы приложили еще площадь $\triangle ADE$, после построения $CF \perp AF$ мы из площади $EBCD$ вычли площадь $\triangle BCF$, но $\triangle BCF = \triangle ADE$, следовательно, полученная после вычитания площадь $EDCF$ равна данной площади $ABCD$.

155. В виде упражнений разберем следующие случаи равновеликости. Пусть на отрезке a + b (чер. 163) построен квадрат и пусть построены еще прямые, соединяющие точки, где граничат слагаемые отрезки. Тогда видим, что площадь всего квадрата слагается из четырех частей: 1) площади квадрата со стороною a, 2) площади квадрата со стороною b и 3) из площадей двух прямоугольников, со сторонами a и b. Поэтому имеем:



Чер. 163. Чер. 164. Чер. 165.

Площ. (a + b, a + b) = площ. (a, a) + площ. (b, b) + 2 площ. (a, b).

Здесь обозначения: (a + b, a + b), (a, b) и т. д. выражают прямоугольники, стороны которого суть в 1-м a + b и a + b, а во 2-м a и b.

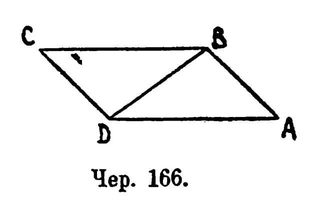
Также из чертежа 164 увидим:

Площ. (a — b, a — b) = площ. (a, a) + площ. (b, b) — 2 площ. (a, b).

Из чертежа 165 видим:

Площ. ABCD = площ. AGKE + площ. GKFB — площ. DEKH — площ. HKFC или площ. (a + b, a — b) = площ. (a, a) + площ. (a, b) — площ. (a, b) — площ. (b, b) или площ. (a + b, a — b) = площ. (a, a) — площ. (b, b)

Эти зависимости могут служить иллюстрациями известных алгебраических формул.



Чер. 166.

156. Если построим диагональ BD параллелограмма $ABCD$ (чер. 166), то получим $\triangle ABD$, имеющий такие же основания и высоту, как и параллелограмм. Кроме того, известно, что $\triangle ABD = \triangle DBC$. Поэтому имеем:

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, имеющего такие же основание и высоту.

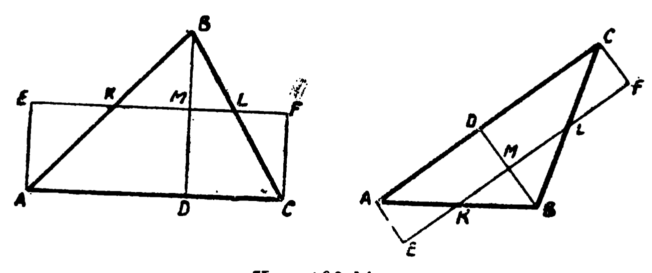
Или сокращенно:

Треугольник равновелик половине параллелограмма, имеющего такие же основание и высоту.

Из сравнения только что полученного результата с тем, который мы нашли в n° 153, можем заключить:

Треугольники, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики.

Добавим еще: **если у двух параллелограммов одинаковые основания, но разные высоты, то площадь того параллелограмма больше, у которого высота больше**, — это ясно из того, что параллелограмм с меньшею высотою можно превратить в равновеликий ему, площадь которого занимает лишь часть площади другого параллелограмма. Отсюда заключаем, что **если у двух треугольников одинаковые основания, но разные высоты, то площадь того треугольника больше, у которого высота больше.**



Чер. 166 bis.

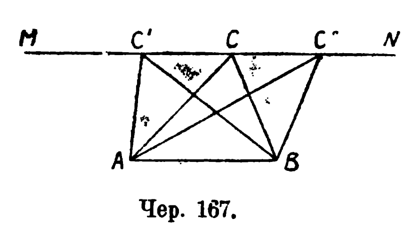
Добавление. Любой треугольник можно превратить в равновеликий ему прямоугольник.

Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 166 bis, где даны 2 варианта: слева дан $\triangle$ со всеми острыми углами, а справа $\triangle$ с тупым углом). Если у треугольника все углы острые, то построим любую его высоту BD, а если у треугольника один угол тупой, напр., $\angle B$ (в $\triangle ABC$ справа), то построим высоту BD именно из вершины этого тупого угла (в таком случае всегда высота BD идет внутри треугольника). Разделим затем высоту BD пополам

в точке M и построим через M прямую $EF \parallel AC$, а через точки A и C прямые $AE \perp AC$ и $CF \perp AC$. Тогда ясно: 1) $\triangle KBM = \triangle KAE$ (точка K есть точка пересечения AB и EF), 2) $\triangle MBL = \triangle FCL$ (точка L есть точка пересечения BC и EF), откуда следует, что площ. $AEFC =$ площ. $\triangle ABC$.

157. Построим геометрическое место вершин равновеликих треугольников, имеющих общее основание.

Пусть имеем $\triangle ACB$ (чер. 167). Чтобы другой треугольник с тем же основанием AB имел такую же площадь, надо, согласно предыдущему n°, чтобы его высота равнялась высоте данного. Для этого необходимо, чтобы его вершина была расположена на таком же расстоянии от прямой AB, как и точка C. Таких точек бесчисленное множество и все они расположены на прямой MN, параллельной основанию и проходящей чрез точку C. Конечно, возможно на таком же расстоянии построить еще другую параллельную AB, по другую ее сторону.



Чер. 167.

Итак, геометрическое место вершин треугольников, равновеликих между собою и имеющих общее основание, есть прямая (или две прямых), параллельная основанию.

Иногда то же свойство выражают в такой форме:

От перенесения вершины треугольника по прямой, параллельной основанию, его площадь не изменяется.

158. Упражнения. 1. Превратить данный треугольник ABC в равновеликий ему с тем же основанием AB, но чтобы угол при точке A был данный.

2. Превратить данный треугольник ABC в равновеликий ему с тем же основанием AB, но чтобы сторона, выходящая из точки A, была равна данному отрезку.

3. Превратить $\triangle$ ABC в равновеликий ему равнобедренный с тем же основанием AB.

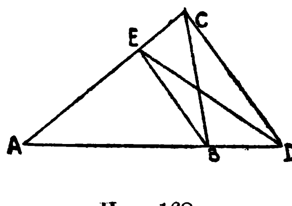
Надо воспользоваться геометрическим местом n° 157 и геометрическим местом вершин равнобедренных треугольников, имеющих осно-

вание AB,— этим местом является перпендикуляр к AB чрез его середину.

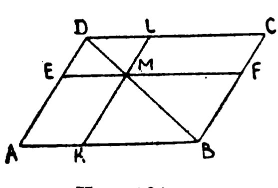
4. Превратить △ ABC в равновеликий ему треугольник с другим основанием AD (чер. 168).

Соединив C с D, построив BE || CD и соединив E с D, получим искомый △ AED (часть ABE осталась неизменною, а △ BEC равновелик △ BED).

Мы увеличили основание (было AB, стало AD). Можно также уменьшить его.



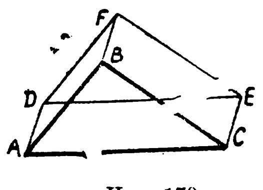
Чер. 168.



Чер. 169.

5. На диагонали BD параллелограмма ABCD (чер. 169) взята точка M и чрез нее построены прямые EF и KL, параллельные сторонам параллелограмма. Тогда параллелограммы AKME и MFCL равновелики.

6. На сторонах △ ABC (чер. 170) построены параллелограммы ACED, CEFB и BFDA (сторона BF, если ее продолжить, пройдет внутри отрезка AC). Параллелограмм ACED равновелик сумме параллелограммов ABFD и BCEF.



Чер. 170.

7. Превратить данный параллелограмм в равновеликий ему △ с тою же высотою.

159. Задача 1. Превратить данный параллелограмм в равновеликий ему с данным основанием.

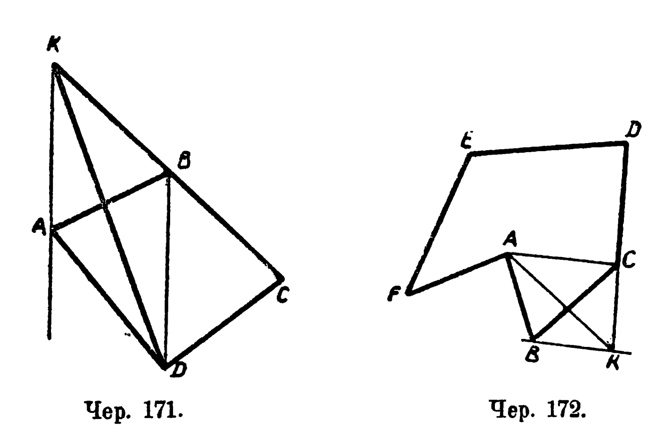
Пусть дан параллелограмм *ABFE* (чер. 169) и требуется превратить его в равновеликий ему с основанием, равным отрезку *BK*. Отложив данное основание *BK* на основании *BA* данного параллелограмма, как это сделано на чертеже, построим прямую *KML* || *AE*; затем построим прямую *BM* и продолжим ее до пересечения в точке *D* с продолжением стороны *AE* данного параллелограмма. Наконец, построим прямую *DC* || *AB*, которая пересекает прямую *KML* в точке *L* и продолжение прямой *BF* в точке *C*. Тогда параллелограмм *KBCL* есть искомый.

В самом деле: $\triangle DML = \triangle DME$; $\triangle BDC = \triangle BDA$; след., площ. $BMLC =$ площ. $BMEA$; но $\triangle BMF = \triangle BMK$; след., площ. $BMLC +$ площ. $BMK =$ площ. $BMEA +$ площ. BMF, или площ. $BKLC =$ площ. $BFEA$. Совершенно так же решается задача о построении прямоугольника, равновеликого данному и имеющему данное основание.

Задача 2. Превратить 4-угольник в равновеликий ему треугольник.

Пусть требуется 4-угольник $ABCD$ (чер. 171) превратить в равновеликий ему треугольник.

Для этого диагональю BD разобьем площадь четыреугольника на две части и один из треугольников, напр. $\triangle ABD$, превратим в равновеликий ему с тем же основанием BD так, чтобы один



Чер. 171. Чер. 172.

из углов 4-угольника, напр. $\angle B$, выпрямился. Для этого надо вершину A перенести по прямой, параллельной основанию BD, в точку K, где эта параллельная пересекается с продолжением стороны BC. Тогда $\triangle KBD$ равновелик $\triangle ABD$ и, следовательно, $\triangle DKC$ равновелик 4-угольнику $ABCD$.

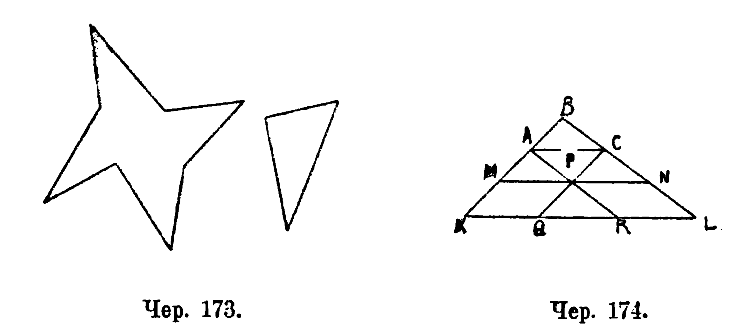
Пусть теперь имеем 6-угольник $ABCDEF$ (чер. 172). Отсечем диагональю AC сначала $\triangle ABC$ и превратим его в равновеликий ему $\triangle AKC$ с тем же основанием AC, где вершина K есть точка пересечения прямой $BK \parallel AC$ с продолжением стороны DC. Тогда наш 6-угольник превратился в равновеликий ему 5-уголь-

ник *AKDEF*. Повторяя тот же прием еще раз, превратим полученный 5-угольник в равновеликий ему 4-угольник, затем последний — в равновеликий ему треугольник. Таким образом, всякий многоугольник, имеющий площадь, можно превратить в равновеликий ему треугольник.

Теперь процесс сложения и вычитания площадей (n° **152**) упрощается: каждый из данных многоугольников превратим в равновеликий ему треугольник, построим новый многоугольник, площадь которого равна сумме или разности площадей полученных треугольников (приложим один треугольник к другому, или наложим один на другой) и этот многоугольник превратим опять в равновеликий ему треугольник.

160. Упражнения. 1. Превратить невыпуклый 4-угольник (имеющий площадь) в равновеликий ему треугольник.

2. Построить треугольник, равновеликий сумме данного треугольника и невыпуклого 8-угольника (чер. 173).



Чер. 173. Чер. 174.

Построить также треугольник, равновеликий их разности.

3. Построить △, площадь которого была бы в 2, 3... раза больше площади данного △, а основание осталось бы то же.

4. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, где M и N суть середины сторон AB и BC. Тогда площадь △ MBN в 4 раза меньше площади △ ABC.

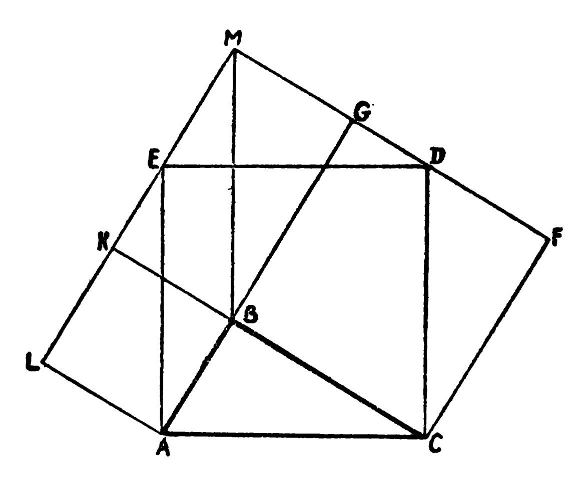
5. Стороны BA и BC треугольника ABC продолжены и увеличены в 2 раза каждая. От соединения концов продолжений получится новый треугольник, площадь которого в 4 раза больше площади данного.

6. Стороны BA и BC треугольника ABC (чер. 174) продолжены так, что BK = 3BA и затем построено KL || AC. Площадь △ KBL в 9 раз больше площади △ ABC.

Построим еще MN, где M и N середины отрезков AK и CL, APR и CPQ, где P середина отрезка MN, и, наконец, QM и RN. Тогда MQ || AR || BL и NR || CQ || BK.

Легко теперь увидать, что 1) сторона BL в 3 раза больше стороны BC, 2) сторона KL в 3 раза больше стороны AC и 3) площадь △ KBL в 9 раз больше площади △ ABC. Итак, если стороны треугольника увеличить в 3 раза, то площадь его увеличится в 9 раз.

7. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если стороны его увеличить в 4 раза каждую? (Как выполнить построение, необходимое для увеличения каждой стороны в 4 раза?)



Чер. 175.

161. Выполним следующее построение: 1) Из концов гипотенузы AC (чер. 175) прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = d$) построим $AE \perp AC$ и $CD \perp AC$, отложим $AE = CD = AC$ и соединим точки D и E, — получим квадрат $AEDC$, стороны которого $= AC$ ($AEDC$ есть квадрат, построенный на гипотенузе). 2) Продолжим AB по направлению BG ($BG \perp BC$), построим $CF \perp BC$ и чрез точку D построим прямую GF, перпендикулярную к BG и к CF (ведь $CF \parallel BG$). Тогда получим квадрат $BCFG$, сторона которого $=$ катету BC прямоугольного $\triangle ABC$; в самом деле, $\triangle CDF = \triangle ABC$, так как $CD = AC$ (по первому построению), $\angle DCF = \angle BCA$, потому что оба эти угла дополняются углом BCD до прямого, а этого достаточно для равенства

прямоугольных треугольников (углы при B и F прямые), следов., $CF = BC = BG = GF$ ($CBGF$ есть квадрат, построенный на катете BC). 3) Построим BK — продолжение BC, $AL \perp AB$ ($AL \parallel BK$) и чрез точку E построим прямую EL, перпендикулярную к BK и к AL. Тогда получится квадрат $ABKL$, сторона которого равна катету AB прямоугольного $\triangle ABC$. Доказательство, такое же, как и в предыдущем построении, вытекает из равенства треугольников ALE и ABC; $ABKL$ есть квадрат, построенный на катете AB. 4) Продолжим FG и LK до пересечения в точке M.

В предыдущем мы нашли, что $\triangle CDF = \triangle ABC$ и $\triangle AEL = \triangle ABC$. Мы можем еще найти треугольники, равные $\triangle ABC$. Прежде всего это ясно для $\triangle EMD$, гипотенуза которого ED равна гипотенузе AC и $\angle MED = \angle BAC$, как углы с параллельными сторонами. Затем, построив отрезок MB, получим два равных треугольника $\triangle BMG = \triangle BMK$ (так как MB есть диагональ прямоугольника $BKMG$). Легко увидать, что $KB = AB$ (стороны квадрата), $KM = BG$ (противоположные стороны прямоугольника) $= BC$ (стороны квадрата). Поэтому $\triangle BKM = \triangle ABC$ (так как катеты их равны), а следовательно и $\triangle MGB = \triangle ABC$.

Итак, имеем:

$$\triangle ABC = \triangle CFD = \triangle AEL = \triangle EMD = \triangle BKM = \triangle MGB.$$

Рассмотрим площадь $ACFMLA$. Если от этой площади отрезать куски, занимаемые треугольниками AEL, EMD и CDF, то останется площадь, занимаемая квадратом $AEDC$, то-есть

$$\text{площ. } AEDC = \text{площ. } ACFMLA - 3 \text{ площ. } \triangle ABC.$$

Но такие же три части мы можем отрезать от площади пятиугольника $ACFML$ иным способом, отрезав площади треугольников BMK, BGM и ABC, — эти три треугольника равны, как мы уже нашли, прежним. Отняв от площади, занимаемой пятиугольником $ACFML$, площади треугольников BMK, MBG (или сразу отнять площадь прямоугольника $BKMG$) и ABC, получим площади, занимаемые квадратами $ALKB$ и $BGFC$, т.-е.

$$\text{площ. } ALKB + \text{площ. } BGFC = \text{площ. } ACFMLA - 3 \text{ пл. } \triangle ABC.$$

Так как в обоих случаях мы отнимали поровну (утроенную площадь $\triangle ABC$), то остатки должны быть равны, т.-е.

$$\text{площ. } AEDC = \text{площ. } ALKB + \text{площ. } BGFC,$$

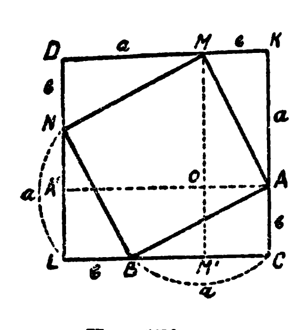
или в словесной форме:

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

Это свойство известно под именем **теоремы Пифагора**.

Можно и иными способами (их много) выяснить то же свойство. Вот еще два из них:

1) Пусть имеем прямоугольный $\triangle ABC$ (чер. 176). Обозначим его катеты каждый одною буквою: $BC = a$ и $AC = b$. Отложим на продолжениях катетов отрезки $BL = b$ и $AK = a$ и построим квадрат $CKDL$, сторона которого $= a + b$. Далее построим точки M и N так, чтобы $KM = b$, $MD = a$, $DN = b$ и $NL = a$ и соединим A с M, M с N и N с B; тогда получим квадрат $AMNB$, площадь которого получается, если от площади квадрата $CKDL$ отнять площади 4 равных треугольников ABC, AMK и т. д. Построив затем прямые $AA' \parallel CL$ и $MM' \parallel KC$, получим два квадрата: $OMDA'$, сторона которого $= a$ и $OACM'$, сторона которого $= b$; сумма площадей этих квадратов получается, если от площади квадрата $CKDL$ отнять площади 2 прямоугольников $OAKM$ и $OM'LA'$, каждый из которых имеет стороны a и b и площадь каждого равна удвоенной площади $\triangle ABC$ (ясно видно, например, что площ. $OAKM = 2$ площ. $\triangle AMK$, но $AMK = \triangle ABC$).

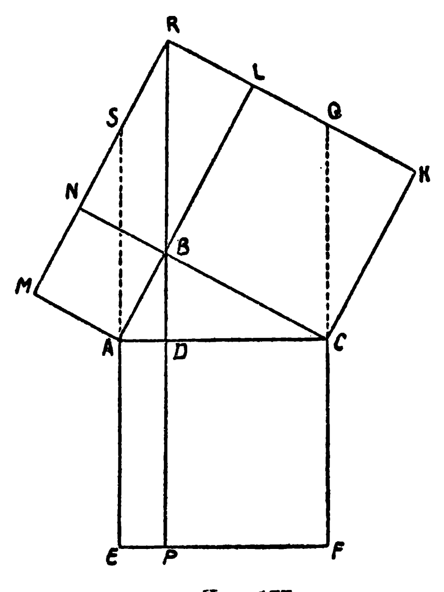


Чер. 176.

Отсюда вытекает справедливость теоремы Пифагора.

2) Пусть имеем прямоугольный $\triangle ABC$ (чер. 177). Построим квадраты AF, AN и BK на его гипотенузе и катетах и продолжим стороны LK и MN до пересечения в точке R. Затем построим прямую BR и продолжим стороны AE и CF до пересечения в S и в Q с прямыми MR и RK. Тогда $\triangle BLR = \triangle ABC$, так как у них равные катеты $BL = BC$, $LR = BN = AB$; сле-

довательно, $BR = AC = AE = CF$. Кроме того, $\angle RBL = \angle ACB$, но $\angle BCA = \angle QCK$, так как каждый из них дополняется углом BCQ до прямого. Поэтому $\angle RBL = \angle QCK$ и, следовательно, $RB \parallel QC \parallel SA$ и, след., $RB = QC = SA$. Продолжим RB до пересечения со сторонами квадрата AF в точках D и P; тогда $BP \perp AC$ и $BP \perp EF$ (ибо $RP \parallel SE$). Параллелограмм $ASRB$ равновелик прямоугольнику $EADP$ (у них равные основания $PD = BR$ и одинаковые высоты), но тот же параллелограмм $ASRB$ равновелик квадрату $AMNB$, так как у них общее основание AB и одинаковые высоты. Следовательно, прямоугольник $EADP$ равновелик квадрату $AMNB$. Также найдем, что прямоугольник $PDCF$ равновелик квадрату $CBLK$, а, следовательно, квадрат $ACFE$ равновелик сумме квадратов $AMNB$ и $BLKC$.



Чер. 177.

162. Упражнения. 1. Вершины L и F квадратов, построенных на катетах (чер. 175), расположены на одной прямой с точкой B, вершиной прямого угла треугольника.

2. Построить квадрат равновеликий сумме данных двух квадратов.

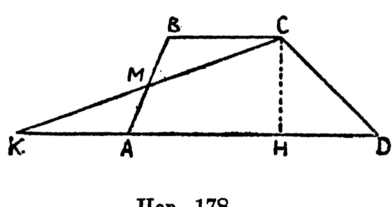
3. Построить квадрат равновеликий разности двух данных квадратов.

4. Построим на чер. 177 прямые BE и MC, которые пересекутся пусть в точке X; тогда точки E, A, X и C лежат на одном круге, диаметр которого есть EC. (Выясняется это так: $\triangle ABE = AMC$, откуда $\angle AEX = \angle ACX$). Отсюда вытекает, что $CM \perp BE$. Далее легко найти, что $AR \parallel BE$ и, следовательно, $CM \perp AR$.

Пользуясь этим, показать:

5. Прямые CM и AK пересекаются на BD ($BD \perp AC$).

163. Превратить трапецию в равновеликий треугольник.



Чер. 178.

Пусть имеем трапецию $ABCD$ (чер. 178). Найдем середину M одной из ее непараллельных сторон, построим прямую CM и найдем ее точку пересечения K с прямою DA. Тогда $\triangle AMK = \triangle MBC$ и, следовательно, трапеция $ABCD$ равновелика $\triangle KCD$, у которого та же высота (CH), а основание $KD = KA + AD = BC + AD$, то-есть трапеция равновелика треугольнику, имеющему такую же высоту, а основание которого = = сумме параллельных сторон трапеции.

ЧАСТЬ II.

Измерительная геометрия.

ГЛАВА XVII.

Учение об отношениях прямол. отрезков.

164. Если нам дано уравнение

$$y = 3x. \qquad (1)$$

мы можем найти бесчисленное множество решений этого уравнения: можно принять x равным любому числу (например, $0;\ 1;\ 2;\ 1\frac{1}{2}$ и т. д.); тогда найдем соотв. число для y ($0;\ 3;\ 6;\ 4\frac{1}{2}$ и т. д.).

Данное уравнение можно еще написать в виде

$$\frac{y}{x} = 3. \qquad (2)$$

Пусть теперь требуется построить два отрезка таких, чтобы они удовлетворяли уравнению (1). Эта задача также легко решается: построим (чер. 179) произвольный отрезок x и затем на какой-либо прямой отложим от какой-либо ее точки этот отрезок 3 раза, — получим искомый отрезок y. Таких пар отрезков, удовлетворяющих уравнению (1), можно найти бесчисленное множество. Принято и в том случае, когда x и y в уравнении (1) означают не числа, а отрезки, писать это уравнение не только в виде

x

y

Чер. 179.

уравнения (1), но и в форме уравнения (2), хотя мы и не умеем делить отрезок y на отрезок x. Можно смотреть на уравнение (2) с той точки зрения, что здесь дается новая форма для выражения числа 3: число 3 здесь представлено в виде символа $\frac{y}{x}$, где y и x отрезки. Этот символ $\frac{y}{x}$ называется **отношением отрезка y к отрезку x.**

Чер. 180.

Подобно этому, можно также решить отрезками уравнение $y=\frac{5}{6}x$ (см. чер. 180), для чего надо лишь умение делить любой отрезок на сколько угодно равных частей. Так же точно, согласно предыдущему условию, мы можем, понимая под y и x отрезки, написать наше уравнение в виде $\frac{y}{x}=\frac{5}{6}$, которое прочтем: „отношение отрезка y к отрезку x равно числу $\frac{5}{6}$“. На последнее уравнение можно также смотреть, как на новую форму выражения числа $\frac{5}{6}$. Из этих примеров можно притти к общему заключению: **всякое целое или дробное число можно представить в форме отношения двух отрезков.**

165. Возникает мысль о задаче, обратной тем, какие решались в предыдущем n°, т.-е.: даны два отрезка A и B (чер. 181); требуется для них составить уравнение вида $A=k.\ B$ или $\frac{A}{B}=k$, где k какое-либо число.

Чер. 181.

Если действительно удастся составить такое уравнение, если, напр., получим $A=37B$ или получим $A=\frac{39}{29}B$, то мы видим, что решение этой задачи должно основаться на существовании такого третьего отрезка, который укладывается на каждом из данных по целому числу раз; в примере $A=37\ B$ таким отрезком является сам B: он укладывается 37 раз на отрезке A и 1 раз на самом себе; во втором примере ($A=\frac{39}{29}B$) таким от-

резком является отрезок, равный $\frac{1}{29}$ части отрезка B: он укладывается 39 раз на отрезке A и 29 раз на отрезке B.

Принято называть

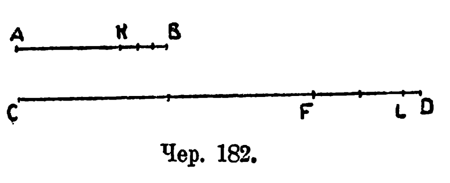
общею мерою двух отрезков такой третий отрезок, который укладывается по целому числу раз на каждом из данных отрезков.

В первом из предыдущих примеров ($A = 37\ B$) общею мерою отрезков A и B служит сам отрезок B: он укладывается 37 раз на A и один раз на B.

Во втором случае ($A = \frac{39}{29} B$) общею мерою озрезков A и B служит 29-я доля отрезка B: она укладывается 39 раз на A и 29 раз на B.

Итак, для решения нашей обратной задачи необходима общая мера двух данных отрезков. Вот пример, на котором выясняется, как можно в некоторых случаях найти общую меру двух отрезков.

Пусть имеем отрезок AB и отрезок CD (чер. 182). Попытаемся найти общую меру отрезков AB и CD.



Чер. 182.

Попытаем сначала, не уложится ли меньший из них, в данном случае отрезок AB, на отрезке CD целое число раз. Если AB уложится на CD целое число раз, то AB и есть общая мера между AB и CD (на AB укладывается 1 раз и на CD укладывается, например, 3 раза). Допустим, что AB на CD укладывается 2 раза с остатком FD. Тогда попытаем, не уложится ли этот остаток FD на отрезке AB целое число раз: если бы уложился целое число раз на AB, то и уложился бы целое число раз и на CF и на CD, т.-е. тогда отрезок FD был бы общею мерою. Допустим (как на чертеже), что FD на AB укладывается 1 раз с остатком KB. Тогда, исходя из тех же соображений, пробуем, не уложится ли KB на FD без остатка; допустим, что KB на FD укладывается 2 раза с остатком LD. Затем пробуем, не уложится ли LD на KB без остатка и допустим, что, наконец, достигли

этого, т.-е. пусть LD укладывается на KB раза без остатка [1]). Тогда LD и является общею мерою. Остается сосчитать, сколько раз эта общая мера укладывается на отрезках AB и CD. Для этого запишем те наложения, которые мы выполняли.

$CD = 2AB + FD$	$CD = 27LD$
$AB = FD + KB$	$AB = 10LD$
$FD = 2KB + LD$	$FD = 7LD$
$KB = 3LD$	

Второй столбец этой записи составляется по направлению снизу вверх: $FD = 2KB + LD = 6LD + LD = 7LD$; $AB = FD + KB = 7LD + 3LD =$ и т. д.

Теперь мы видим, что общею мерою наших отрезков является отрезок LD, который есть $\frac{1}{10}$ доля отрезка AB, так как $AB = 10LD$, т.-е.

$$LD = \frac{1}{10} AB.$$

Но мы получили, что $CD = 27LD$; следовательно,

$$CD = \frac{27}{10} AB \text{ или } \frac{CD}{AB} = \frac{27}{10}.$$

Второе из этих уравнений читают: отношение отрезка CD к отрезку AB равно числу $\frac{27}{10}$, а первое можно понимать так: отрезок CD измерили отрезком AB (принимая за единицу отрезок AB) и получили число $\frac{27}{10}$, подобно тому, как запись:

„Высота дерева $= 5\frac{3}{4}$ аршина“ понимают в том смысле, что высота дерева (отрезок) измерена аршином и получилось число $5\frac{3}{4}$.

---

[1]) Делая это допущение, мы тем самым признаем возможность случая, что никогда не достигнем того, чтобы полученный остаток в предыдущем укладывался целое число раз без нового остатка.

Если бы, наоборот, нам требовалось найти $\frac{AB}{CD}$ (отношение AB к CD) или измерить отрезок AB, принимая за единицу CD, то, конечно, общая мера осталась бы та же самая, т.-е. LD, но тогда отрезок LD был бы $\frac{1}{27}$ долею единицы CD, т.-е.

$$LD = \frac{1}{27} CD \text{ и, следов., } AB = \frac{10}{27} CD \text{ или } \frac{AB}{CD} = \frac{10}{27}.$$

Нахождение общей меры выполняется в таком порядке: укладываем меньший отрезок на большем, полученный остаток на меньшем, новый остаток на предыдущем и т. д., пока остатка не получится; последний остаток и является общею мерою двух данных отрезков.

Следует заметить, что найденная таким образом общая мера является наибольшею: всякая часть ее также будет общею мерою; например, если найденная общая мера укладывается 10 раз на AB и 27 раз на CD, то ее третья доля укладывается 30 раз на AB и 81 раз на CD.

166. Изложим теперь в общем виде ход мысли при решении задачи „найти отношение двух данных отрезков“, допуская, что они имеют общую меру.

Пусть требуется найти $\frac{CD}{AB}$ (чер. 183) или, что то же самое, измерить отрезок CD, принимая за единицу отрезок AB. Тогда находим согласно предыдущему общую меру отрезков CD и AB (согласно допущению это возможно) и рассуждаем теперь в общем виде: положим, что общая мера на отрезке AB укладывается n раз и на отрезке CD — m раз. Тогда общая мера $= \frac{1}{n}$ доли единицы AB и таких долей в CD уложилось m. Следов.,

Чер. 183.

$$CD = \frac{m}{n} AB \text{ или } \frac{CD}{AB} = \frac{m}{n}.$$

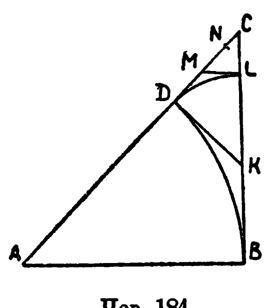
Последнее уравнение можно истолковать так: дробь $\frac{m}{n}$ выражена в новой форме, в виде отношения отрезков CD и AB.

Возникает вопрос, всегда ли возможно найти общую меру двух данных отрезков? Быть может, сколько бы мы ни продолжали процесс ее нахождения, никогда не удастся дойти до того, чтобы последний остаток уложился на предыдущем целое число раз? Практика не может дать ответа на этот вопрос, так как с одной стороны, какой бы хороший циркуль мы ни употребляли для отложения отрезков, всегда при этом делаются ошибки, а с другой стороны, приходится иметь дело со столь мелкими отрезками, что невозможно решить вопрос, откладывается ли полученный отрезок на другом без остатка.

В следующем n° мы рассуждением убедимся, что мы можем построить такие отрезки, которые не имеют общей меры.

Два отрезка, имеющие общую меру, называются соизмеримыми, а неимеющие общей меры, называются несоизмеримыми.

167. Построим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC (чер. 184); это построение легко выполняется: строим прямой угол B и на его сторонах откладываем произвольные, но равные отрезки $BA = BC$.



Чер. 184.

Станем искать общую меру между его гипотенузою AC и одним из катетов. Для этого надо сначала отложить, сколько возможно раз, катет AB на гипотенузе AC. Возникает вопрос, который надо решить рассуждением: сколько раз можно AB уложить на AC. Несомненно, можно один раз, ибо гипотенуза больше катета (n° 86), но двух раз уложить нельзя, так как мы знаем (n° 90), что $AC < AB + BC$ или, в виду равенства $AB = BC$, $AC < 2AB$. Следовательно, катет AB укладывается на гипотенузе AC один раз с остатком. Чтобы найти остаток, построим дугу, принимая A за центр, радиусом $= AB$; тогда, называя чрез D точку пересечения дуги с гипотенузою AC, имеем $AD = AB$ и, следов., остатком является отрезок DC. Теперь следует отрезок

DC укладывать на катете AB, или, что то же самое, на катете BC (ведь $BC = AB$). Для этого из точки D строим $DK \perp AD$. Тогда 1) $\triangle DCK$ прямоугольный равнобедренный, так как $\angle C$, являясь углом равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, равен $\frac{1}{2}d$, следов., и $\angle K = \frac{1}{2}d$ (так как сумма $\angle C + \angle K$ должна равняться d). Следов., $\angle C = K$, откуда $KD = DC$; 2) $DK = KB$, так как это суть отрезки касательных, проведенных к кругу через точку K ($KB \perp AB$, следов., KB есть касательная; так же и KD), ограниченные этою точкою K и точками касания (n°139). Итак, имеем $BK = KD = DC$, т.-е. на катете BC уложили один раз отрезок DC, после чего остается остаток KC, который служит гипотенузою прямоугольного равнобедренного треугольника KDC. Мы уже теперь, на основании исследования прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, можем утверждать: 1) что катет DC этого треугольника уложится на KC, один раз с остатком (следов., DC укладывается на BC два раза с остатком), 2) что после этого мы придем опять к тому же: этот остаток (CL) должно укладывать на катете DC прямоугольного равнобедренного треугольника KDC, и он, как мы уже знаем, уложится на DC два раза с остатком (CN), который в свою очередь уложится на CL два раза с остатком и т. д. Из этого мы видим, что наш процесс нахождения общей меры никогда не должен кончиться: всякий раз, отложив последний остаток один раз на предыдущем, мы придем опять к прямоугольному равнобедренному треугольнику, катет которого надо откладывать на гипотенузе, а мы знаем, что он уложится на гипотенузе еще один раз с остатком, — следов., всякий раз последний остаток укладывается в предыдущем два раза с остатком. Итак, общей меры нет, т.-е.

Гипотенуза и катет равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмеримы.

168. Целые и дробные числа вместе называются рациональными числами. Если мы хотим считать, что отношение двух отрезков y и x, т.-е. символ $\frac{y}{x}$ всегда равен числу, то рациональных чисел недостаточно, и математика расширяет понятие

о числе [1]) так, чтобы всегда можно было считать, что отношение двух отрезков равно числу: если отрезки соизмеримы, то отношение их равно какому-либо рациональному числу; если отрезки несоизмеримы, то условимся, что их отношение выражает собою какое-то новое число, которое назовем иррациональным. Таким образом, на символ $\frac{y}{x}$, где y и x суть отрезки, мы всегда можем смотреть, как на число. Если это число мы назовем через k, то имеем

$$\frac{y}{x}=k \text{ или } y=kx.$$

Мы сперва остановимся на первом из этих уравнений. Его можно понимать так:

Если даны два отрезка (напр., y и x), то всегда существует отношение этих отрезков, прямое и обратное (т.-е. $\frac{y}{x}$ и $\frac{x}{y}$), причем каждое отношение двух отрезков служит новою формою для выражения чисел: иногда оно выражает знакомые нам из курса арифметики рациональные числа, а иногда, если отрезки (y и x) несоизмеримы, выражает новое, иррациональное, число.

Все числа, и рациональные и иррациональные, обладают признаком равноправности: они выражаются в одной и той же форме, — в форме отношения двух отрезков.

---

[1]) Расширение понятия о числе проводится во всем курсе математики: первоначально мы имеем дело лишь с целыми числами; желание, чтобы действие деление всегда оказалось бы выполнимым, заставляет обобщить понятие о числе,—и мы вводим в семью чисел дробные числа; желание, чтобы вычитание оказалось всегда возможным, заставляет еще в семью чисел ввести отрицательные числа. Далее вводится еще иррациональные и мнимые числа. Каждое обобщение понятия о числе должно быть сделано так: 1) надо, чтобы все члены расширенной области чисел оказались равноправными; 2) надо, чтобы о каждой паре чисел можно было бы установить, равны ли они между собою, или одно из них больше другого (или меньше), причем должны иметь место аксиомы для понятий «равно», «больше» и «меньше» [a) если $A=B$, то и $B=A$; b) если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$; c) если $A=B$ и $B>C$, то $A>C$]; 3) чтобы над любыми числами расширенной области можно было выполнять все действия, причем по возможности сохранились бы все законы действий.

169. О всяких двух данных рациональных числах мы можем узнать, равны ли эти числа, или одно из них больше другого. Теперь надо расширить это умение и научиться узнавать о всяких двух числах, будут ли они рациональны или иррациональны или одно из них рационально, а другое иррационально, равны ли эти числа или одно из них больше другого.

Так как каждое из тех чисел, с которыми мы имеем теперь дело, выражается отношением двух отрезков, то мы должны научиться применять понятия „больше", „меньше", „равно" к отношениям отрезков, подобно тому, как мы это умеем делать для рациональных. чисел, для отрезков, для углов, для площадей, ограниченных прямыми линиями.

Для этой цели сперва рассмотрим ряд отношений с одинаковыми последующими членами, напр.:

$$\frac{y}{x};\ \frac{y_1}{x};\ \frac{y_2}{x};$$

Мы можем признать, что одно из этого ряда отношений равно, больше или меньше другого, смотря по тому, будет ли предыдущий член первого отношения равен, больше или меньше предыдущего члена второго, т.-е.

$$\frac{y_1}{x}=\frac{y_2}{x}, \text{ если } y_1=y_2$$

$$\frac{y_1}{x}>\frac{y_2}{x}, \text{ если } y_1>y_2$$

$$\frac{y_1}{x}<\frac{y_2}{x}, \text{ если } y_1<y_2.$$

Ясно, что мы не впадаем здесь в противоречие с тем, как мы прилагаем понятия „равно", „больше" и „меньше" к рациональным числам: если отрезки y_1 и y_2 соизмеримы с x, то отношения $\frac{y_1}{x}$ и $\frac{y_2}{x}$ выражают рациональные числа, и ясно, что для них предыдущие условия справедливы.

170. Прежде чем перейти к случаю, когда у рассматриваемых отношений последующие члены различны, мы должны остановиться на следующем факте.

Если имеем два несоизмеримых отрезка AB и CD (чер. 185), то можно построить два новых отрезка, удовлетворяющих условиям:

Чер. 185.

1) Оба они соизмеримы, например, с отрезком CD и один из них меньше отрезка AB, а другой больше.
2) Разность между ними равна любой доле, сколь угодно малой, отрезка CD. } (A).

Выберем, например, пятую долю отрезка CD. Тогда, чтобы построить два указанных отрезка, поступаем следующим образом[1]): разделим отрезок CD на 5 равных частей и станем эту часть откладывать на отрезке AB, — пусть, например, она уложилась 8 раз с остатком KB, который, следов., $< \frac{1}{5} CD$; тогда получим отрезок AK, удовлетворяющий уравнению

$$AK = \frac{8}{5} CD \qquad (1)$$

Отложив от K еще $\frac{1}{5}$ долю CD, получим отрезок AL, о котором напишем

$$AL = \frac{9}{5} CD \qquad (2)$$

Два полученные отрезка AK и AL и суть искомые:

1) Один из них $AK < AB$ и другой $AL > AB$; оба они соизмеримы с CD, 2) разность между ними $= \frac{1}{5} CD$, т.-е.

$$AL - AK = KL = \frac{1}{5} CD.$$

---

[1]) Здесь мы пользуемся едва уловимою, благодаря своей очевидности, аксиомою Архимеда: если отрезок a больше отрезка b, то всегда можно найти такое целое число n, чтобы было $nb < a$, но $(n+1)b > a$.

Отсюда мы получаем на основании n° 169: так как $AB > AK$, то $\frac{AB}{CD} > \frac{AK}{CD}$, но $\frac{AK}{CD} = \frac{8}{5}$ [из равенства (1)], — следов., $\frac{AB}{CD} > \frac{8}{5}$; так как $AB < AL$, то $\frac{AB}{CK} < \frac{AL}{CD}$, но $\frac{AL}{CD} = \frac{9}{5}$ [из равенства (2)], — следов., $\frac{AB}{CD} < \frac{9}{5}$.

Эти неравенства можно соединить вместе:

$$\frac{8}{5} < \frac{AB}{CD} < \frac{9}{5},$$

т.-е. нам удалось установить, что отношение наших двух несоизмеримых отрезков AB и CD (или равное ему иррациональное число) заключается между числами $\frac{8}{5}$ и $\frac{9}{5}$. Эти числа разнятся между собою на $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}\right)$, а, следов., отношение $\frac{AB}{CD}$ разнится от одного из них меньше, чем на $\frac{1}{5}$. Поэтому говорят, что узнали отношение $\frac{AB}{CD}$ с точностью до $\frac{1}{5}$.

Если бы мы разделили сначала отрезок CD на 10 равных частей, то также нашли бы два отрезка, соизмеримых с CD, между которыми заключается отрезок AB, причем разность между ними равнялась бы $\frac{1}{10}$ CD. Тогда получили бы, например,

$$\frac{17}{10} < \frac{AB}{CD} < \frac{18}{10}.$$

Это неравенство можно было бы толковать так: нам удалось узнать отношение $\frac{AB}{CD}$ с точностью до $\frac{1}{10}$. Так же можно было бы узнать это отношение с точностью до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Иногда даже пишут $\frac{AB}{CD} =$ (прибл.) $\frac{17}{10}$ или $=$ (прибл.) $\frac{18}{10}$.

171. Мы таким образом здесь научились находить рациональные числа, меньшие и большие отношения двух несоизмеримых отрезков. Легко теперь расширить это умение, а именно:

О всяком рациональном числе, целом или дробном, мы можем установить, равно ли оно отношению двух данных отрезков, или больше, или меньше его.

Пусть даны два отрезка AB и CD (чер. 185) и дано число $\frac{p}{q}$ $\left(\text{например, } \frac{8}{15}\right)$. Мы можем разделить отрезок CD на q (на 15) равных частей и взять таких частей p (8); тогда получим отрезок $=\frac{p}{q}CD$ $\left(=\frac{8}{15}CD\right)$. Если этот отрезок окажется равным отрезку AB, то (n°169) $\frac{p}{q}=\frac{AB}{CD}\left(\frac{8}{15}=\frac{AB}{CD}\right)$; если этот отрезок окажется меньше AB, то $\frac{p}{q}<\frac{AB}{CD}\left(\frac{8}{15}<\frac{AB}{CD}\right)$; если, наконец, этот отрезок окажется больше AB, то $\frac{p}{q}>\frac{AB}{CD}\left(\frac{8}{15}>\frac{AB}{CD}\right)$.

Добавление. Из предыдущего мы видим свойства, которыми должны обладать новые числа, введенные нами для выражения отношения двух несоизмеримых отрезков: 1) мы можем найти такое целое или дробное число, чтобы оно отличалось от нашего нового числа, выражающего отношение двух данных несоизмеримых отрезков, меньше чем на любую долю единицы (можно вычислять это новое число с любою точностью), но оно не может равняться никакому целому или дробному числу; 2) о всяком целом или дробном числе мы можем установить, больше ли оно или меньше нового числа, выражающего отношение двух данных несоизмеримых отрезков.

Можно, обобщая понятие о числе, не опираться на отрезки, но ввести иррациональные числа, как символы, которые указывали бы возможность как-либо обосновать два предыдущих свойства. Частным случаем иррациональных чисел являются те числа, которые вводятся в курс алгебры для того, чтобы считать символы $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$ и т. п. за числа. Например, для $\sqrt{2}$ мы имеем, что он не может равняться ни целому, ни дробному числу, но

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42 \text{ и т. д.}$$

Эти неравенства указывают возможность вычислять $\sqrt{2}$ с любою точностью. Кроме того, для всякого рационального числа можно установить, считать ли его больше или меньше $\sqrt{2}$, например, возьмем число 1, 41423 и возведем его в квадрат — получим 2,0004465129, т.-е. больше 2; поэтому $1{,}41423 > \sqrt{2}$ возьмем еще число $1\frac{1}{3}$ и возведем его в квадрат, — получим $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$, т.-е. меньше 2; поэтому $1\frac{1}{3} < \sqrt{2}$.

172. Можно приближенно вычислять отношение двух несоизмеримых отрезков и без уменья делить отрезок на равные части.

Пусть имеем 2 несоизмеримых отрезка AB и CD (чер. 186). Отложим меньший из них CD на AB, — пусть он отложится 3 раза с остатком KB; затем отложим KB на отрезке CD — пусть он уложится 1 раз с остатком LD; затем откладываем отрезок LD на KB, — пусть он уложится 3 раза с остатком MB.

Чер. 186.

Этот процесс откладывания нового остатка на предыдущем здесь никогда не кончится, так как отрезки AB и CD предполагаются несоизмеримыми. Но мы можем для приближенного вычисления отношения AB к CD принять, применяясь к чертежу 186, что остаток MB очень близок к отрезку LD и тогда счесть приблизительно, что LD укладывается на KB ровно 4 раза. Тогда имеем:

$$AB = 3\,CD + KB;\quad CD = KB + LD;\quad KB = (\text{прибл.})\ 4\,LD.$$

Откуда

$$CD = (\text{прибл.})\ 5\,LD \text{ и } AB = (\text{прибл.})\ 19\,LD.$$

Отсюда мы можем заключить, что

$$AB = (\text{прибл.})\ \frac{19}{5}\ CD \text{ или } \frac{AB}{CD} = (\text{прибл.})\ \frac{19}{5}.$$

Для того, чтобы дать здесь ответ на существенный вопрос приближенного вычисления, каков здесь предел ошибки, надо знать теорию непрерывных дробей. Заметим лишь, что этот ответ дать можно.

Возможно было бы, если остаток MB оказался мал, вовсе пренебречь им и принять, что $KB=$(прибл.) $3\,LD$; тогда получили бы другое приближенное значение для $\frac{AB}{CD}$.

Если бы мы продолжили дальше процесс отложения: отложили MB на LD (например, 1 раз с остатком), новый остаток на MB и т. д., то, прервав где-либо этот процесс и приняв, что один из остатков равен приблизительно последующему остатку, повторенному целое число раз, мы получили бы другое приближенное значение для $\frac{AB}{CD}$, более точное.

Теория непрерывных дробей могла бы дать указание, сколь далеко надо продолжить этот процесс, чтобы получить приближенное значение для нашего отношения с точностью, например, до $\frac{1}{100}$.

173. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса, как применять понятия „больше", „меньше" и „равно" к двум отношениям с различными последующими членами. Иногда удается воспользоваться арифметическими соображениями. Например, если мы получили $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{5}$ и $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{4}{5}$ (где AB, CD, $A'B'$ и $C'D'$ суть отрезки), то ясно, что $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$; также, если удалось узнать, что $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{3}$, а $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{4}{5}$, то, принимая во внимание, что $\frac{4}{5}>\frac{2}{3}$ $\left(\frac{4}{5}=\frac{12}{15}, \frac{2}{3}=\frac{10}{15}\right)$, мы имеем $\frac{AB}{CD}<\frac{A'B'}{C'D'}$ или $\frac{A'B'}{C'D'}>\frac{AB}{CD}$.

Но случаи, когда возможно воспользоваться арифметикою, редки, и нам необходимо разобрать вопрос о равенстве или неравенстве двух отношений в предположении, что мы не знаем, какому именно числу равно каждое из них (а если AB и CD несоизмеримы, то символ $\frac{AB}{CD}$ мы не всегда даже в состоянии заменить другим символом, выражающим то же число в арифметической форме).

Для выяснения вопроса обратимся сначала к арифметике. Пусть даны два числа $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{24}$; найти число большее одного из них и меньшее другого.

Для этого приведем наши дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2}{9}=\frac{16}{72} \text{ и } \frac{5}{24}=\frac{15}{72}.$$

Мы видим, что требуемое число нельзя найти в виде дроби со знаменателем 72. Поэтому, обращаясь к более мелким долям, получим: $\frac{2}{9}=\frac{32}{144}$ и $\frac{5}{24}=\frac{30}{144}$. Отсюда находим искомое число $\frac{31}{144}$.

Далее, так как

$$\frac{2}{9}=\frac{48}{216} \text{ и } \frac{5}{24}=\frac{45}{216}$$

то вот еще искомые числа: $\frac{46}{216}$ и $\frac{47}{216}$.

Раздробляя $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{24}$ в еще более мелкие доли, найдем, что искомых чисел бесконечно много. Возможность нахождения таких чисел имеет причиною, что $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{24}$ не равны $\left(\frac{5}{24}<\frac{2}{9}\right)$. Если же нам даны два равных числа, хотя бы и в различной форме, напр., $\frac{5}{8}$ и $\frac{10}{16}$, то найти указанные числа невозможно.

Теперь нам числа даются в особой форме: в виде отношений отрезков. Мы не умеем изменить эту форму так, чтобы отношение двух отрезков оставалось равным самому себе, но чтобы последующий член сделался одинаковым с последующим членом другого отношения (так мы в арифметике поступаем с дробями с целью узнать, какая из них больше), но зато мы умеем (n° **171**) всякое рациональное число сравнивать с отношением двух данных отрезков. Поэтому мы можем те заключе-

ния, какие вывели из решения предыдущей арифметической задачи, применить к сравнению двух отношений отрезков, независимо от того, соизмеримы ли или нет эти отрезки:

Два отношения (двух пар отрезков) равны между собою, если нельзя найти рационального числа так, чтобы оно было больше одного из этих отношений и меньше другого.

Если же, наоборот, удается найти такое рациональное число p, чтобы p было больше $\frac{AB}{CD}$, но чтобы $p < \frac{A'B'}{C'D'}$, то наши отношения $\frac{AB}{CD}$ и $\frac{A'B'}{C'D'}$ не равны, а именно $\frac{A'B'}{C'D'} > \frac{AB}{CD}$.

174. Мы можем простыми геометрическими построениями получить 2 пары отрезков, отношения которых равны между собою Построим $\angle A$ (чер. 187) и на одной его стороне отложим равные отрезки: $AB = BC = CD$, затем построим $BB' \parallel CC' \parallel DD'$; тогда, согласно n° 111, получим $AB' = B'C' = C'D'$. Теперь нетрудно составить несколько пар равных отношений: $\frac{AB}{BD} = \frac{A'B'}{B'D'}$ (каждое отношение $= \frac{1}{2}$; общая мера отрезков AB и BD есть AB, а отрезков AB' и $B'D'$ есть AB') $\frac{AC}{AD} = \frac{AC'}{AD'}$ (каждое отношение $= \frac{2}{3}$; общая мера для AC и AD есть также AB, а для AC' и AD' — также AB') и т. п.

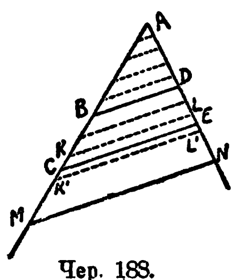
Чер. 187.

175. Можно обобщить предыдущий пример: построим $\angle A$ (чер. 188) и пересечем его произвольно, не откладывая каких-либо равных отрезков, параллельными BD, CE, MN. Не окажется ли, что и здесь отношение каких-либо двух отрезков на одной стороне угла равным отношению соответствующих двух отрезков на другой стороне? Рассмотрим, напр., отношения $\frac{BC}{AB}$ и $\frac{DE}{AD}$.

Выберем самое большое число со знаменателем n, где n любое целое число, так, чтобы оно было меньше отношения $\frac{BC}{AB}$. Для этого разделим отрезок AB на n равных частей и станем эти части откладывать на отрезке BC; допустим, что их уложится m с остатком KC. Тогда имеем:

$BK < BC$ и, следов., $\frac{BK}{AB} < \frac{BC}{AB}$, но

$\frac{BK}{AB} = \frac{m}{n}$; следов., $\frac{m}{n} < \frac{BC}{AB}$.



Чер. 188.

Построив ряд прямых параллельных BD и CE чрез концы отложенных n-ых долей AB, увидим, что этими прямыми отрезок AD разделится на n равных частей (n° **111**) и таких частей на отрезке DE уложится m с остатком LE. Тогда $DL < DE$, и следов., $\frac{DL}{AD} < \frac{DE}{AD}$, но $\frac{DL}{AD} = \frac{m}{n}$. Отсюда заключаем, что число $\frac{m}{n}$ меньше также и отношения DE к AD, т.-е.

$$\frac{m}{n} < \frac{DE}{AD}.$$

Отсюда мы видим, что всякое число, меньшее одного из наших отношений, должно быть меньше другого. Мы говорим „всякое число“ потому, что число n мы можем выбрать каким угодно, а числитель дроби $\frac{m}{n}$ мы брали так, чтобы получилась наибольшая дробь со знаменателем n, меньшая отношения $\frac{BC}{AB}$.

[Точно так же можно увидать, что всякое число, большее первого отношения, должно быть больше и второго, для этого надо рассмотреть наименьшее число со знаменателем n, большее отношения $\frac{BC}{AB}$, а для этого надо от точки K отложить одну n-ую долю AB, до точки K'. Тогда $BK' > BC$ и, следов., $\frac{BK'}{AB} > \frac{BC}{AB}$, но $\frac{BK'}{AB} = \frac{m+1}{n}$, следов.,

$$\frac{m+1}{n} > \frac{BC}{AB}.$$

Построив чрез K' прямую $K'L' \parallel CE$, найдем на другой стороне угла точку L' так, что $DL' > DE$ и, следов., $\frac{DL'}{AD} > \frac{DE}{AD}$, но $\frac{DL'}{AD} = \frac{m+1}{n}$. Поэтому

$$\frac{m+1}{n} > \frac{DE}{AD}.$$

Итак, даже наименьшая из дробей со знаменателем n, которая больше отношения $\frac{BC}{AB}$, оказывается больше, чем и отношение $\frac{DE}{AD}$].

Отсюда общее заключение: нельзя найти такого числа, которое было бы меньше одного из отношений $\frac{BC}{AB}$ и $\frac{DE}{AD}$ и в то же время больше другого из них; следов., признак равенства двух отношений (n° **173**) оправдывается, т.-е.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}.$$

Если оказалось бы, что n-ая доля AB уложилась на BC m раз без остатка, то тогда $\frac{BC}{AB} = \frac{m}{n}$ и при помощи параллельных увидим, что и $\frac{DE}{AD} = \frac{m}{n}$, т.-е. и здесь оправдалось бы вышенаписанное равенство.

Мы могли бы взять также на первой стороне отрезок AC и за другой — ему соответствующий отрезок AE.

Тогда, рассматривая отношения $\frac{AC}{AB}$ и $\frac{AE}{AD}$, мы увидали бы, что наибольшее число со знаменателем n, которое меньше отношения $\frac{AC}{AB}$, есть $\frac{m+n}{n}$ и оно, как легко увидеть, меньше также и отношения $\frac{AE}{AD}$. [Точно так же наименьшее число $\frac{m+n+1}{n}$ со знаменателем n, большее первого отношения, оказывается больше и второго]. Отсюда заключаем, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Так же точно можно выяснить и следующие равенства [1]):

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}, \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{DE}, \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}, \frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}.$$

Для выяснения этих равенств надо поступать так же, как выше, но делить на n равных частей не отрезок AB, но BC и затем AC. Каждое из полученных равенств называется пропорцией.

Если построить еще $MN \parallel CE$, то легко распространить тем же способом полученный результат и на новые отрезки. Тогда, напр., получим $\frac{BC}{CM}=\frac{DE}{EN}$ и т. д.

Отсюда имеем:

Если стороны угла пересечь параллельными, то отношение двух каких-либо отрезков на одной стороне угла равно отношению двух соответствующих отрезков на другой стороне угла.

То же свойство выражают короче:

Если стороны угла пересечь параллельными, то отрезки на одной стороне угла пропорциональны соответствующим отрезкам на другой.

Слово „пропорциональны" надо понимать в том смысле, что отношение всякой пары отрезков на одной стороне равно отношению соответствующей пары отрезков на другой.

Это определение пропорциональности совпадает с тем, которое известно из арифметики. В самом деле, возьмем одну из наших пропорций, напр.,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}.$$

Отсюда легко увидать: 1) если $AB > BC$, то и $AD > DE$, т.-е. с увеличением одной величины — отрезки на каждой прямой можно рассматривать, как величину — другая также увеличивается; 2) если, напр., $AB = 3BC$, то $\frac{AB}{BC}=3$ и, следовательно, $\frac{AD}{DE}=3$, откуда $AD = 3DE$, т.-е., если одна величина увеличи-

[1]) Надо здесь обратить внимание на добавление к n° 111.

вается в несколько раз, то и другая увеличивается во столько же раз.

176. Пусть теперь $\angle A$ (чер. 189) пересечен не параллельными прямыми BC и DE. Сравним, напр., отношения $\frac{AD}{AB}$ и $\frac{AE}{AC}$. Построим $DF \parallel BC$ и разделим AC на такие равные части, чтобы каждая из них была меньше отрезка FE, и станем эти части откладывать на отрезке CE. Тогда конец хотя бы одной такой части попадет куда-либо между точками F и E (ибо каждая часть $< FE$), — пусть K есть конец одной из таких частей. Положим, что пришлось AC разделить на n равных частей и что таких частей от A до K уложилось m. Тогда

$\frac{AK}{AC}$ = дроби $\frac{m}{n}$, но $\frac{AK}{AC} < \frac{AE}{AC}$ (ибо последующие члены одинаковы, а $AK < AE$), следовательно,

Чер. 189.

$$\text{дробь } \frac{m}{n} < \frac{AE}{AC}.$$

Построив через концы отложенных частей ряд параллельных (на чертеже даны пунктиром), последнею из которых есть KK', мы увидим, что точка K' придется вне отрезка AD, что AB разделится на n равных частей и что таких частей на AK' уложится m. Поэтому

$\frac{AK'}{AB}$ = дроби $\frac{m}{n}$, но $\frac{AK'}{AB} > \frac{AD}{AB}$ (ибо последующие члены одинаковы, а $AK' > AD$), следовательно,

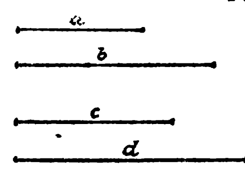
$$\text{дробь } \frac{m}{n} > \frac{AD}{AB}.$$

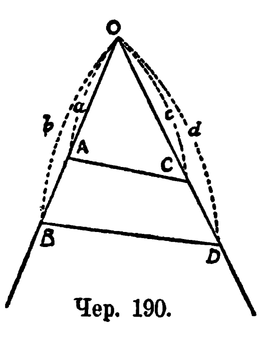
Мы видим, что здесь удалось найти дробь, которая меньше одного из отношений и больше другого; поэтому наши отношения не равны, а именно $\frac{AD}{AB} < \frac{AE}{AC}$.

Добавление. При нашем способе построения отрезков и при том порядке, в каком мы их берем для составления отношений, то из двух отношений оказывается меньше, члены которого расположены на стороне угла, более близкой к точке пересечения непараллельных BC и DE.

Если рассматривать отношения, обратные предыдущим, т.-е. $\frac{AB}{AD}$ и $\frac{AC}{AE}$, то имели бы, что $\frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AE}$, т.-е. то отношение было бы больше, члены которого располагаются на прямой, более близкой к точке пересечения прямых BC и DE.

177. Предыдущими признаками можно пользоваться для узнавания, равно ли отношение одной пары отрезков отношению другой пары. Пусть, напр., имеем 4 отрезка a, b, c и d (чер. 190). Узнаем, равно ли отношение отрезка a к отрезку b $\left(\text{т.-е. } \frac{a}{b}\right)$ отношению отрезков c и d $\left(\text{т.-е. } \frac{c}{d}\right)$. Для этой цели построим какой-либо $\angle O$ и на его сторонах построим отрезки $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и $OD = d$. Построим затем прямые AC и BD: если $AC \parallel BD$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если AC не $\parallel BD$, то $\frac{a}{b}$ не равно $\frac{c}{d}$ (если, например, как то приблизительно имеет место на чертеже, прямые AC и BD пересекаются в какой-либо точке, более близкой к OD, чем к OB, то $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$).





Чер. 190.

Добавление. Пусть оказалось, что $AC \parallel BD$. Тогда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ или, на основании n°175, $\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$ $\left(\text{т.-е. } \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}\right)$ и т. п.

178. Если 4 данных отрезка a, b, c и d таковы, что, напр., $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то эти 4 отрезка составляют пропорцию, или мы

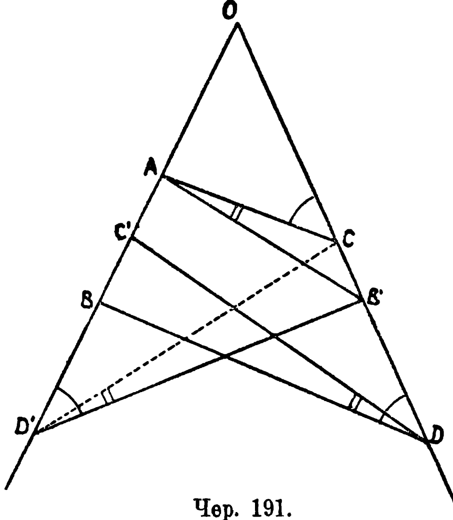
имеем 4 пропорциональных отрезка. Пропорции, членами которых являются отрезки, обладают свойствами, сходными со свойствами пропорций, членами которых служат числа. Покажем, напр., что в пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \tag{1}$$

где a, b, c и d суть отрезки, можно переставлять средние члены, т.-е., что из предыдущей пропорции вытекает другая, а именно

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}. \tag{2}$$

Для этого на сторонах угла O (чер. 191) отложим члены пропорции (1): $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ и $OD=d$ и построим прямые AC и BD.



Чер. 191.

Так как пропорция (1) справедлива, то $AC \parallel BD$.

Отложим еще: $OC'=$ $=OC=c$, $OD'=OD=d$, $OB'=OB=b$, и построим прямые AB', DC', $D'B'$ и $D'C$.

Тогда мы будем иметь $\angle OCA=\angle ODB$ (ибо $AC \parallel BD$) $=\angle OD'B'$ (ибо $\triangle OBD=\triangle OB'D'$ — у этих треугольников $OB'=OB$, $OD'=OD$ и $\angle O$ общий). Отсюда следует, что $\angle ACB'+$ $+\angle AD'B'=2d$ (ибо $\angle AD'B'=\angle OCA$), т.-е. около четыреугольника $ACB'D'$ можно описать круг (этот круг на чертеже не дан). Поэтому углы CAB' и $CD'B'$ суть углы, вписанные в этот круг и опирающиеся на одну и ту же дугу CB', откуда заключаем, что $\angle CAB'=\angle CD'B'$, но $\angle CD'B'=\angle C'DB$, ибо $\triangle CD'B'=\triangle C'DB$ (из равенства $\triangle OBD$ и $\triangle OB'D'$ вытекает, что $BD=B'D'$; также из равенства $\triangle OCD'$ и $\triangle OC'D$ вытекает, что $DC'=D'C$ и, наконец, $BC'=B'C$, ибо $BC'=OB-OC'$,

а $B'C = OB' - OC$), следов., $\angle CAB' = \angle C'DB$. Теперь $\angle CB'A$ является внутренним углом $\triangle CAB'$, а $\angle OCA$ есть внешний угол для этого же треугольника.

Поэтому $\angle CB'A$ или $\angle OB'A = \angle OCA - \angle CAB'$.

Далее непосредственно видим $\angle ODC' = \angle ODB - \angle C'DB$.

Но мы видели, что $\angle OCA = \angle ODB$ и $\angle CAB' = \angle C'DB$, откуда следует, что $\angle OB'A = \angle ODC'$, т.-е., что $AB' \parallel C'D$.

Поэтому имеем право написать пропорцию

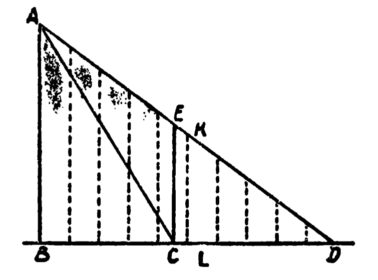
$$\frac{OA}{OC'} = \frac{OB'}{OD} \text{ или } \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

что и доказывает возможность переставлять средние члены пропорции [1]).

179. Чтобы лучше усвоить мысль, выраженную в n°173, рассмотрим здесь еще пример.

Пусть (чер. 192) через точку A построены: $AB \perp BD$ и наклонные AC и AD. Сравним отношение наклонных с отношением их проекций, т.-е. $\frac{AC}{AD}$ с $\frac{BC}{BD}$. Построим прямую $CE \parallel BA$; затем разделим AD (большую наклонную) на столько равных частей, чтобы каждая часть была меньше разности между AC и AE ($AC > AE$, что видно из $\triangle ACE$, где $\angle E$ тупой). Называя это число равных частей, на которые делим AD, через n, имеем:

$$AC - AE > \frac{1}{n} AD.$$



Чер. 192.

Поэтому, если на AC укладывается таких частей m с остатком, то на AE их уложится по крайней мере на одну меньше, т.-е. m таких частей составят отрезок больший, чем AE.

Разделив AD на указанные равные части, мы найдем отрезок AK, больший чем AE и равный $\frac{m}{n}$ AD. Построив через точки деления ряд параллельных перпендикуляру AB, найдем, что BD разделится на n

---

[1]) Это доказательство заимствовано из D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie.

равных частей и получим отрезок $BL = \frac{m}{n} BD$, причем $BL > BC$. Итак, имеем:

$$BL = \frac{m}{n} BD, \text{ или } \frac{BL}{BD} = \frac{m}{n}$$

$$\text{но } BC < BL, \text{ поэтому } \frac{BC}{BD} < \frac{BL}{BD}, \text{ или}$$

$$\text{дробь } \frac{m}{n} > \frac{BC}{BD}.$$

Согласно условию на наклонной AC тех частей, на которые разделена AD, укладывается m с остатком, т.-е.

$$AC > \frac{m}{n} AD \text{ или } \frac{AC}{AD} > \frac{m}{n} \text{ или дробь } \frac{m}{n} < \frac{AC}{AD}.$$

Итак, нам удалось найти такое число $\frac{m}{n}$, что оно больше отношения проекций $\left(\frac{BC}{BD}\right)$, и меньше отношения наклонных $\left(\frac{AC}{AD}\right)$, откуда заключаем, что

$$\frac{AC}{AD} > \frac{BC}{BD}.$$

(Отношение наклонных больше отношения их проекцій).

ГЛАВА XVIII.

Измерение прямолинейных отрезков.

180. Итак, если имеем 2 отрезка y и x, то можно составить уравнение, связывающее эти два отрезка, в виде (n°168)

$$\frac{y}{x} = k \text{ или } y = kx,$$

где k есть число рацион. или иррацион.

Остановимся теперь на второй форме этого уравнения, т.-е. $y = kx$.

Примем отрезок x за единицу, т.-е. положим, что $x = 1$; тогда из предыдущего уравнения получим $y = k$, т.-е., если отрезок x оценить числом 1, то отрезок y выразится числом k. Поэтому уравнение $y = kx$ понимают так:

Мы измерили отрезок y, принимая за единицу отрезок x, причем в результате этого измерения получилось число k.

Вот примеры:

1) Длина комнаты $= 8\frac{1}{2}$ аршин,

т.-е. мы измерили прямолинейный отрезок, называемый „длиною комнаты“, принимая отрезок, называемый „аршином“, за единицу, и получили в результате число $8\frac{1}{2}$.

2) Рост этого человека $= \frac{13}{16}$ сажени,

т.-е. мы измерили прямолинейный отрезок, выражающий рост этого человека, принимая за единицу сажень, и получили число $\frac{13}{16}$.

3) Отр. $A = 0{,}377$ отр. B,

т.-е. мы измерили отрезок A, принимая за единицу отрезок B, и получили число 0,377.

Тот отрезок, который принимается за единицу, называется **линейною единицею**: в 1-м примере линейною единицею служит аршин, во 2-м — сажень, в 3-м — отрезок B.

Следует заметить, что все предыдущие равенства могут быть даны и в другой форме:

$$1)\ \frac{\text{длина комн.}}{\text{аршин}} = 8\frac{1}{2};\quad 2)\ \frac{\text{Рост этого чел.}}{\text{сажень}} = \frac{13}{16};$$

$$3)\ \frac{\text{отр. } A}{\text{отр. } B} = 0{,}377,$$

т.-е. „отношение длины комнаты к аршину = числу $8\frac{1}{2}$“, „отношение роста этого человека к сажени = числу $\frac{13}{16}$“, „отношение отрезка A к отрезку B = числу 0,377“.

Таким образом, задача „измерить отрезок A, принимая отрезок B за единицу“, совпадает с задачею „найти отношение отрезка A к отрезку B“.

181. Всякие два отрезка y и x можно связать уравнением

$$y = kx,$$

где k какое-либо число целое, дробное или иррациональное. Другими словами: всякий отрезок может быть измерен, принимая

какой-либо другой отрезок за линейную единицу, причем в результате измерения получится число целое, дробное или иррациональное.

Если число k окажется рациональным (целым или дробным), то предыдущее уравнение $y = kx$ укажет нам, как можно из линейной единицы x получить измеряемый отрезок y (напр., если $y = \frac{3}{7}x$, то для получения y надо линейную единицу x разделить на 7 равных частей и взять 3 таких части).

Если число k окажется иррациональным, то уравнение $y = kx$ таких указаний нам дать не может: ведь для нас иррациональное число и определено лишь, как отношение двух несоизмеримых отрезков (n°168). В исключительных лишь случаях возможно, что это иррациональное число выразится каким-либо иным символом, напр., $\sqrt{2}$; тогда это обстоятельство может нам помочь получить отрезок y, выполняя некоторые построения над отрезком x.

Поэтому прибегают к *приближенному измерению*. В nn° 170 и 172 мы научились узнавать приближенные значения отношения двух отрезков: в n°170 мы для этой цели пользовались умением делить отрезок на равные части, а в n°172 обошлись без этого умения, причем, однако, в n°170 мы могли найти приближенное значение с какою угодно, наперед заданною, точностью, а в n°172 мы указали, что это было бы возможно лишь при знании теории непрерывных дробей.

Теперь нам придется обратиться к n°170 с целью истолковать в другой форме полученные там результаты.

Возобновим чер. 185 и поставим задачу: измерить отрезок AB с точностью до $\frac{1}{5}$, принимая отрезок CD за линейную единицу, причем будем считать, что AB и CD не соизмеримы. Мы получили в n°170 два отрезка AK и AL, которые оба соизмеримы с линейною единицею CD, причем $AK = \frac{8}{5}CD$ и $AL = \frac{9}{5}CD$. Так как $AK < AB$, но $AL > AB$, то отсюда вытекает

$$\frac{8}{5}CD < AB < \frac{9}{5}CD.$$

Иногда то же самое записывают в виде:

$$AB = \text{прибл. } \frac{8}{5}CD \text{ (с недост.), или } \frac{9}{5}CD \text{ (с изб.).}$$

[**Пояснение.** Если вместо отрезка AB взять отрезок $AK = \frac{8}{5} CD$, то здесь чего-то „недостает“ сравнительно с отрезком AB; поэтому в скобках пишем „с недостатком“. Если вместо AB взять отрезок $AL = \frac{9}{5} CD$, то здесь имеется „избыток“ сравнительно с отрезком AB; поэтому в скобках пишем „с избытком“].

Считая отрезок AB равным $\frac{8}{5} CD$, или $\frac{9}{5} CD$, мы в обоих случаях делаем ошибку, меньшую $\frac{1}{5} CD$. Поэтому мы говорим, что измерили отрезок AB с точностью до $\frac{1}{5}$ линейной единицы CD.

Также точно могли бы измерить отрезок AB линейною единицею CD с точностью до $\frac{1}{10} CD$. Напр., могли бы получить

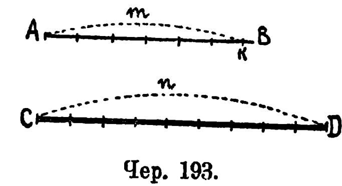
$$\frac{17}{10} CD < AB < \frac{18}{10} CD$$

или $AB =$ прибл. $\frac{17}{10} CD$ (с недост.), или $\frac{18}{10} CD$ (с избыт.).

В n°170 имеются соответствующие записи об отношении $\frac{AB}{CD}$, а именно:

$$\frac{17}{10} < \frac{AB}{CD} < \frac{18}{10} \text{ и } \frac{AB}{CD} = \text{прибл. } \frac{17}{10} \text{ или} = \text{прибл. } \frac{18}{10}.$$

182. Мы можем предыдущую задачу решить в общем виде: измерить отрезок AB линейною единицею CD с точностью до $\frac{1}{n} CD$. Разделим CD (чер. 193) на n равных частей и станем эти части укладывать на отрезке AB; пусть их уложилось m с остатком KB, причем $KB < \frac{1}{n} CD$ (всегда можно дойти до такой точки K — в этом состоит аксиома Архимеда, см. подстрочное примечание на стран. 168). Отрезок $AK = \frac{m}{n} CD$, но он меньше



Чер. 193.

отрезка AB, причем разность этих отрезков меньше $\frac{1}{n}CD$; поэтому мы можем принять, что

$$AB = \text{прибл.}\ \frac{m}{n}CD\ \text{(с недост.)}.$$

Если отложить от точки K еще один раз n-ую часть единицы CD, то перейдем за точку B и получим отрезок $= \frac{m+1}{n}CD$, который больше отрезка AB на отрезок, меньший $\frac{1}{n}CD$. Поэтому опять имеем:

$$AB = \text{прибл.}\ \frac{m+1}{n}CD\ \text{(с избытк.)}.$$

Тоже самое можно записать в виде неравенств:

$$\frac{m}{n}CD < AB < \frac{m+1}{n}CD.$$

Заметим, что на практике применяют изложенный здесь способ приближенного измерения ко всяким отрезкам, не разбирая вопроса, соизмерим ли известный отрезок с линейною единицею или нет.

183. В n°172, находя приближенные значения, отношения отрезков AB и CD (чер. 186) без умения делить отрезок на равные части, мы писали:

$$AB = \text{(прибл.)}\ \frac{19}{5}CD,$$

т.-е. и здесь мы измеряли п р и б л и ж е н н о отрезок AB линейною единицею CD, хотя и не знали, с какою именно точностью это выполняли.

Следует, однако, обратить внимание на n°172, так как из него видно, что для измерения одного отрезка другим, или для нахождения отношения двух отрезков, умение делить отрезок на равные части вовсе не столь необходимо, как это могло показаться с первого взгляда.

184. Обращаясь к nn° 165 и 172, мы можем выяснить те свойства отрезков, которые необходимы для того, чтобы находить отношение двух отрезков, или, другими словами, чтобы выражать отрезки числами, принимая определенный отрезок за единицу.

Необходимо прежде всего умение откладывать один отрезок на другом, причем необходимо уметь различать, когда один отрезок равен другому или больше другого или, наконец, меньше другого (ведь все время в n° 165 и в n° 172 приходилось откладывать на одном отрезке части, равные другому отрезку, и о полученном остатке установить, что он меньше откладываемого отрезка).

Затем нам приходилось, например, в n° 165, писать равенства вроде

$$CD = 2AB + FD$$

или, более подробно:

$$CD = AB + AB + FD.$$

Писать подобные равенства мы можем лишь при условии знания, что значит сложить два отрезка. Итак, надо еще знать, что значит сложить два отрезка, причем должно быть установлено, что можно найти сумму всяких двух отрезков.

Все перечисленные знания относительно отрезков изложены в самом начале курса геометрии. Так как, проследив nn° 165 и 172, мы увидим, что иных знаний относительно отрезков не требуется, то мы можем установить, что сведения, данные в nn° 8 — 10, об отрезках достаточны для умения находить отношение всякой пары отрезков.

Умение делить отрезок на равные части, которым мы пользовались в n° 182, несущественно, — это видно из n° 172.

Если имеем совокупность предметов, причем 1) для каждых двух предметов этой совокупности можно установить, равны ли они, или один из них больше другого и 2) можно установить понятие о сумме двух предметов этой совокупности (а, следовательно, и об их разности) [1], то говорят, что эту совокупность предметов можно рассматривать, как систему величин.

---

[1]) Всякие два предмета этой совокупности должны иметь сумму.

Совокупность прямолинейных отрезков можно рассматривать, как систему величин.

Каждый отдельный отрезок является значением этой системы величин.

Каждое значение системы величин может быть выражено числом, принимая другое ее определенное значение за единицу (каждый прямолинейный отрезок может быть выражен числом, принимая за единицу определенный отрезок).

Свойства прямолинейных отрезков, позволяющие их совокупность считать системою величин, выражают словами: всякий прямолинейный отрезок имеет длину.

На практике для измерения отрезков употребляются раз навсегда выбранные единицы, называемые линейными единицами. Вот наиболее употребительные линейные единицы: сажень, аршин, вершок, верста, фут, дюйм, метр, километр, сантиметр.

На практике не различают, соизмерим ли или нет данный отрезок с единицею, а всегда измеряют с какою-либо точностью. Например, если отрезок начерчен на бумаге, то к нему прикладывают линейку, на которой нанесены, например, дюймы, разделенные на 10 равных частей каждый, и смотрят, сколько целых дюймов и десятых долей дюйма укладывается на данном отрезке, пренебрегая остатком меньше половины десятой доли дюйма, или считая его за целую десятую долю дюйма, если он больше половины ее.

185. Упражнения. 1. Даны два отрезка AB и CD. Найти $\frac{AB}{CD}$, полагая, что эти отрезки соизмеримы; найти затем $\frac{CD}{AB}$ (или: измерить отрезок AB, принимая CD за лин. единицу и, наоборот, измерить CD, принимая AB за единицу).

2. Даны 2 отрезка. Найти приближенное значение их отношения, принимая, что третий остаток при отыскании их общей меры можно принять за их общую меру.

3. Даны 2 (несоизмеримых) отрезка. Найти их отношение с точностью до $\frac{1}{8}$; затем найти с тою же точностью их

обратное отношение (измерить с точностью до $\frac{1}{8}$ первый отрезок, принимая второй за единицу, и, обратно, измерить с тою же точностью второй отрезок, принимая первый за единицу).

ГЛАВА XIX.

Измерение углов и дуг круга.

186. В самом начале курса геометрии было установлено, что значит равные углы, что значит один угол больше другого и что значит найти сумму двух углов, причем, чтобы не делать каких-либо ограничений, надо принять во внимание n° 19, где угол рассматривается, как результат поворота луча около точки (в плоскости). Благодаря этому, углы составляют систему величин, а каждый отдельный угол является определенным ее значением.

Так как здесь налицо те же основные положения, как и при рассмотрении отрезков, то все, что мы нашли для отрезков, справедливо и для углов: также можно измерять углы, принимая один из них за единицу, или находить отношение двух углов.

Чтобы измерять отрезки, нужно было только одно умение (nn° 165 и 172): откладывать на бо̀льшем отрезке меньший. Так же точно, чтобы выполнять измерение углов, мы должны уметь откладывать меньший угол на большем, — а это мы умеем делать, умеем отличать больший угол от меньшего и умеем строить угол, равный данному.

Что же касается приближенного измерения углов (подобного изложенному в n° 181 для отрезков), то мы можем средствами геометрии лишь выполнять эти измерения с точностью до $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ и т. д., так как умеем угол делить только на 2, 4, 8, 16 и т. д. равных частей. Существуют механические способы деления угла на сколько угодно равных частей.

За единицу при измерении углов принимают прямой угол; в предыдущем курсе мы часто встречались с углами, измеренными прямым углом. Например, если в равнобедренном треугольнике

один угол прямой, то каждый из остальных $= \frac{1}{2}$ прямого $\left(\frac{1}{2}d\right)$; каждый из углов равностороннего треугольника $= \frac{2}{3}d$; сумма внутренних углов n-угольника $= 2d\ (n - 2)$ и т. д.

Но эта единица оказывается очень велика и на практике берут другую единицу, которая $= \frac{1}{90}$ части прямого угла $\left(\frac{1}{90}d\right)$ и которая называется **угловым градусом**, при письме обозначают эту единицу знаком (°), поставленным около числа, выражающего угол в этих единицах. Тогда $d = 90°$ и, следовательно,

$$\text{угол равнострононнего треугольника} = \frac{2}{3}d = 60°,$$

$$\text{сумма углов треугольника} = 2d = 180° \text{ и т. д.}$$

Затем вводят еще единицы: угловой градус делят на 60 равных частей, и такую часть называют **угловою минутою**,— ее знак ($'$); угловую минуту делят еще на 60 равных частей и такую часть называют **угловою секундою**,— ее знак ($''$).

Например, имеем $\frac{1}{4}d = 22°30'$; $\frac{1}{16}d = 5°37'30''$.

Деление прямого угла на 90 равных частей, а углового градуса на 60 равных частей и т. д. нельзя выполнять геометрически (циркулем и линейкою), а возможно лишь выполнять механическими способами.

187. Упражнения. 1. Часы показывают 25 минут второго. Вычислить в градусах угол между стрелками часов.

2. Вычислить в градусах (минутах и секундах) внутренний угол правильного 8-угольника, 12-угольника, 20-угольника (его еще мы не умеем строить), 14-угольника (его геометрическими способами невозможно построить).

3. Даны 2 угла; найти отношение этих углов, полагая, что при отыскании общей меры этих углов дойдем до остатка, о котором можно, хоть приближенно, принять, что он укладывается

в предыдущем целое число раз (наложение одного угла на другой надо выполнять при помощи циркуля).

188. В n°21 мы научились различать равные дуги одного круга (или равных кругов) и неравные дуги (знаем, что значит одна дуга больше другой), составили понятие о сумме двух дуг. Надо лишь иметь в виду, что сумма нескольких дуг может оказаться больше всего круга: прикладывая к одной дуге другую, к полученной сумме третью и т. д., можем обойти весь круг и зайти за ту точку, где начинается первая дуга. На основании этих сведений мы также, как и для отрезков, можем утверждать, что дуги одного круга можно выражать числами, принимая за единицу любую дугу. Для выполнения измерения дуг необходимо лишь одно умение, — умение откладывать равные дуги, а это можно выполнять при помощи циркуля, которым можно откладывать равные хорды: равным хордам соответствуют равные дуги (n°**119**).

Обычно за единицу при измерении дуг принимают $^1/_{360}$ часть всей окружности; разделить окружность на 360 равных частей геометрическими способами мы не можем, можем достигнуть этого механическими приемами (n°148). Эта единица называется дуговым градусом; дуговой градус делят еще на 60 равных частей и эту часть называют дуговою минутою; разделив последнюю на 60 равных частей, получим дуговую секунду. Знаки для их обозначения употребляются такие же (°, ′ и ″) как и для угловых градуса, минуты и секунды. Недоразумения здесь быть не может, так как всегда видно, об измерении угла или дуги идет речь. Напр.,

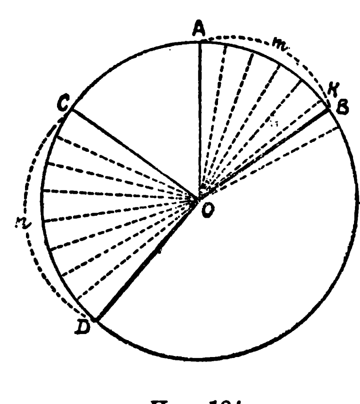
$$\angle AOB = 56^\circ\ 8'\ 24'' \text{ и } \smile MN = 17^\circ\ 42'\ 5''$$

(в первом случае угловые единицы, во втором — дуговые).

189. В том случае, когда две дуги одного круга или два угла несоизмеримы, отношение этих дуг или отношение этих углов признается нами равным какому-то иррациональному числу. Однако, мы не можем утверждать, что эти числа таковы же, как и те, которым равны отношения каких-либо двух отрезков: чтобы это утверждать, надо было бы убедиться, что для любой пары углов (или дуг одного круга) можно было бы построить два таких отрезка, чтобы можно было признать отношение двух углов (или дуг

круга) равным отношению двух построенных отрезков, т.-е., чтобы быть убежденным, что всякое рацион. число, большее одного из этих отношений, больше и другого, и всякое рацион. число, меньшее одного из этих отношений, меньше и другого. Геометрического решения указанного вопроса (построить требуемые два отрезка) вообще не возможно, но общая теория иррациональных чисел позволяет утверждать, что отношение двух несоизмеримых значений одной и той же системы величин (напр., углов) дает иррац. число, которое можно рассматривать, как отношение двух несоизмеримых отрезков.

190. В частном случае мы можем легко усмотреть, что отношение двух углов равно отношению двух определенных дуг.



Чер. 194.

Построим круг O (чер. 194) и два центральных угла $\angle AOB$ и $\angle COD$, которые опираются соотв. на дуги AB и CD. Рассмотрим два отношения $\frac{\angle AOB}{\angle COD}$ и $\frac{\smile AB}{\smile CD}$. Найдем самое большое число со знаменателем n, чтобы оно было меньше первого отношения. Для этого разделим $\angle COD$ на n равных частей (выполнить на самом деле такое построение мы можем лишь тогда, когда число n есть степень числа 2, т.-е. 4, 8, 16, 32..., если же число n какое-либо иное число, то все дальнейшее должно основываться на допущении, что существует угол, хотя мы его построить и не умеем, составляющий $\frac{1}{n}$ часть данного $\angle COD$) и станем такие углы укладывать на угле AOB, — допустим, что их уложится m с остатком KOB ($\angle KOB < \frac{1}{n} \angle COD$); тогда мы найдем число $\frac{m}{n}$, самое большое со знаменат. n, которое меньше $\frac{\angle AOB}{\angle COD}$ (здесь же получим самое малое число со знамен. n, которое больше $\frac{\angle AOB}{\angle COB}$, — оно есть $\frac{m+1}{n}$).

Мы знаем (n° 23), что равным центральным углам соответствуют равные дуги и обратно, что большему центр. углу соотв. большая дуга и обратно. Поэтому делением $\angle COD$ на n равных частей мы и дугу CD разделили на n равных частей; затем, когда откладывали n-ые части $\angle COD$ на $\angle AOB$, мы в то же самое время откладывали n-ые части $\smile CD$ на $\smile AB$: их на $\smile AB$ уложилось тоже m, и остаток KB меньше $\frac{1}{n}$ части $\smile CD$.

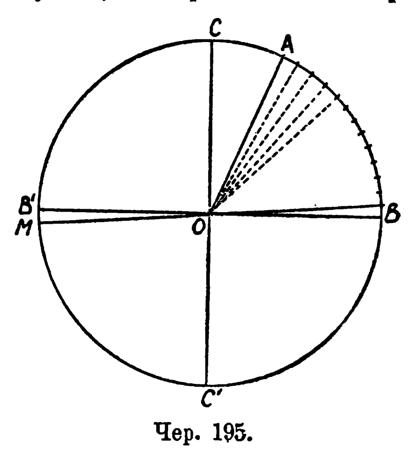
Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ должна быть также меньше отношения $\frac{\smile AB}{\smile CD}$ (а число $\frac{m+1}{n}$ должно быть больше $\left.\frac{\smile AB}{\smile CD}\right)$.

Отсюда мы приходим к заключению, что нельзя найти такое число, чтобы оно было больше одного из рассматриваемых отношений и меньше другого; поэтому

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{\smile AB}{\smile CD},$$

т.-е. отношение двух центральных углов равно отношению соответствующих им дуг.

191. Обращаясь к практическому измерению углов угловыми градусами, а дуг — дуговыми градусами, мы прежде всего обратим внимание на то, что центральному углу в 1° соответствует дуга в 1°.



Чер. 195.

Это ясно из следующего: построим для круга O (чер. 195) два перпендикулярных диаметра $CC' \perp BB'$; тогда окружность разделится на 4 равных части и каждой из них соответствует прямой центральный угол. Но в четвертой части окружности $^{360}/_{4} = 90$ дуговых градусов; следов., прямому углу, в котором 90 угловых градусов, соответствует дуга, в которой 90 дуговых градус—

Если мы дугу $B'C'$ (четверть окружности) разделим на 90 равных частей и точки деления соединим с центром O, то в силу первого положения (равным дугам соответствуют равные центральные углы) и прямой $\angle C'OB'$ разделится на 90 равных частей. Следов., наше положение оправдывается.

Если, напр., $\smile B'M = 1°$, то $\angle B'OM = 1°$.

Пусть теперь имеем какой-либо центральный $\angle AOB$, которому соответствует дуга AB. Отложим от точки A по дуге AB дуговые градусы и концы откладываемых дуг соединим с центром; тогда увидим, что в центральном угле AOB уместится столько угловых градусов, сколько дуговых уместится на дуге AB. Если при отложении дугового градуса на $\smile AB$ получим остаток, меньший дугового градуса, то соответственный центральный угол должен быть меньше углового градуса. Если в этом остатке укладывается определенная часть дугового градуса несколько раз без остатка, то, в силу первого положения, в угловом остатке уложится столько же раз такая же часть углового градуса.

Напр., если в дуговом остатке дуговая минута уложится несколько раз с остатком, то в угловом остатке уложится столько же угловых минут с остатком. В этих остатках (угловом и дуговом) угловая секунда и дуговая секунда или их одинаковые части также должны укладываться по одинаковому числу раз.

Отсюда заключаем:

В центральном угле столько угловых градусов, минут, секунд и их частей (вообще угловых единиц), сколько дуговых градусов, минут, секунд и их таких же частей (вообще соответствующих дуговых единиц) в соответствующей этому углу дуге.

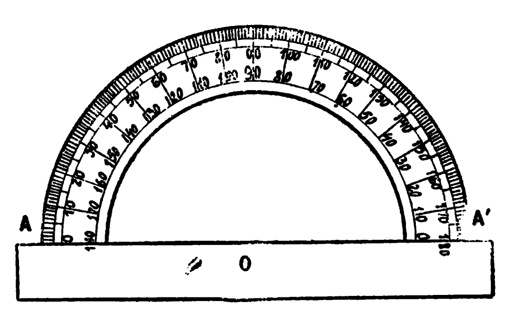
То же выражают короче: центральные углы измеряются соответствующими им дугами.

Если, напр., нашли, что $\smile AB = 66'\ 12'\ 48''$, то и $\angle AOB = 66'\ 12'\ 48''$ (в первом случае дуговые градусы, минуты и секунды, а во втором — угловые).

192. На практике для измерения углов градусами употребляется инструмент, основанный на предыдущем свойстве и называемый транспортиром. Вот его устройство.

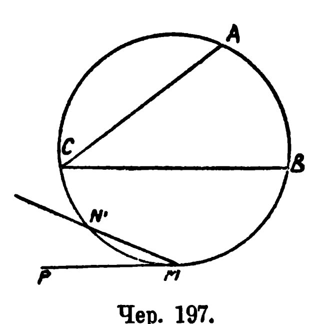
Берется металлический полукруг (чер. 196), разделенный на градусы (в хороших транспортирах делают деления чрез $^1/_2$ гра-

дуса или даже чрез $^1/_3$ градуса). На линейке, связанной в одно целое с полукругом, отмечается центр последнего *O*. Для измерения какого-либо угла располагают транспортир так, чтобы точка *O* транспортира совместилась с вершиною угла и прямая *OA* (или *OA'*) транспортира совместилась с одною из сторон угла. Тогда надо заметить, в каком месте разделенной дуги транспортира эта последняя пересекается с другою стороною угла, — найденное деление и дает выражение угла в градусах. Также транспортиром можно пользоваться для того, чтобы чертить углы данного числа градусов.



Чер. 196.

193. В nn°132 и 133 было найдено, что вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и угол, составленный хордою и касательною, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную внутри первого угла.



Чер. 197.

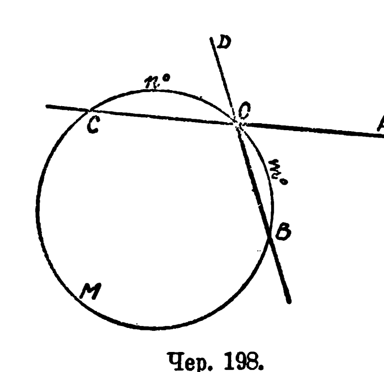
Теперь, пользуясь предыдущим n°, мы можем установить, что в п и с а н н ы й у г о л и у г о л, с о с т а в л е н н ы й х о р д о ю и к а с а т е л ь н о ю, и з м е р я е т с я п о л о в и н о ю д у г и, з а к л ю ч е н н о й в н у т р и э т и х у г л о в. Напр., если $\smile AB$ (чер. 197) $= 80°\ 21'\ 18''$, то $\angle ACB = 40°\ 10'\ 39''$ и если $\smile MN' = 41°\ 10'$, то $\angle N'MP = 20°\ 35'$.

194. Рассмотрим еще $\angle AOB$ (чер. 198), вершина которого расположена на окружности, а стороны как-либо пересекают окружность. Продолжив сторону *OA* в направлении *OC*, получим вписанный $\angle COB$, который опирается на $\smile CMB$. Пусть в $\smile OB$ заключ. $m°$ и в дуге OC — $n°$; тогда $\smile CMB = 360° -$

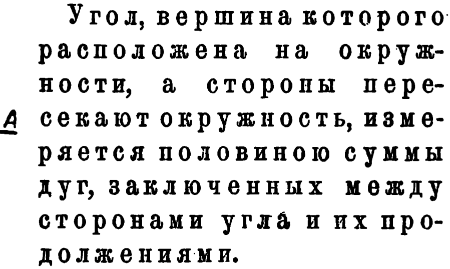
$-(m+n)$, а $\angle COB=\frac{360^\circ-(m+n)^\circ}{2}=180^\circ-\frac{(m+n)^\circ}{2}$. Тот же угол $\angle AOB$, который нам нужен, дополняет $\angle COB$ до выпрямленного, т.-е.

$$\angle AOB=180^\circ-\angle COB=180^\circ-180^\circ+\frac{(m+n)^\circ}{2}=\frac{(m+n)^\circ}{2}.$$

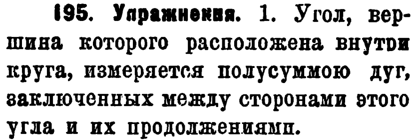
Поэтому, построив еще луч OD, продолжение луча OB, и замечая, что $\smile OB=m^\circ$ лежит внутри $\angle AOB$, а $\smile OC=n^\circ$ лежит между продолжениями сторон этого угла, мы имеем:



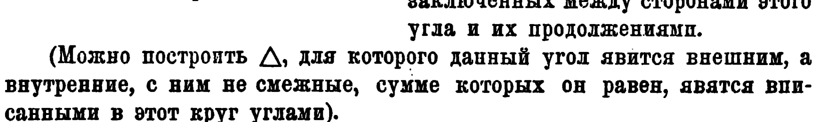
Чер. 198.



Угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность, измеряется половиною суммы дуг, заключенных между сторонами угла и их продолжениями.



195. Упражнения. 1. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммою дуг, заключенных между сторонами этого угла и их продолжениями.



(Можно построить △, для которого данный угол явится внешним, а внутренние, с ним не смежные, сумме которых он равен, явятся вписанными в этот круг углами).

2. Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны или пересекают круг, или касаются его, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

3. Окружность разделена на 4 части, относящиеся, как 2 : 3 : 5 : 6, и точки деления соединены по порядку прямыми. Вычислить углы полученного вписанного 4-угольника.

4. Окружность разделена на 3 части, относящиеся, как 8 : 9 : 10, и в точках деления построены касательные. Вычислить углы полученного описанного треугольника.

ГЛАВА XX.

Измерение площадей.

196. Площадью вообще называется определенная, ограниченная со всех сторон часть плоскости. В главе XVI мы занимались вопросами о сравнении площадей, ограничиваемых прямыми линиями и об их сложении. Мы можем, если даны нам 2 многоугольника, имеющие площадь, узнать, равны ли эти площади или одна из них больше другой (можно, напр., каждый многоугольник превратить в равновеликий ему треугольник, потом один из полученных треугольников превратить в равновеликий ему, имеющий такое же основание, как и другой треугольник, и тогда вопрос, какая из двух площадей больше, сведется к вопросу, высота у какого треугольника больше), и можем построить многоугольник, равновеликий сумме двух данных. Этих условий, как мы знаем, достаточно для того, чтобы можно было площади, ограничиваемые прямыми линиями, выражать числами, принимая одну из них за единицу.

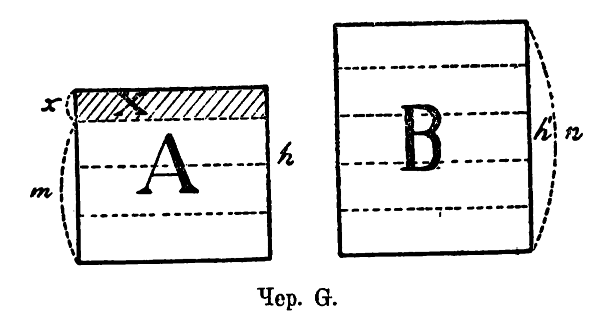
Итак, если имеем две площади A и B, ограниченные прямыми линиями (площади двух многоугольников), то для них можно составить ур-ие $A = kB$ или $\frac{A}{B} = k$, где k какое-либо число: рациональное (целое или дробное), если площадь A соизмерима с площадью B, или иррациональное, если площади A и B несоизмеримы.

Может возникнуть вопрос: может быть, признавая отношение двух площадей $\left(\frac{A}{B}\right)$, в случае несоизмеримости этих площадей, равным особому числу, мы этим самым вводим еще новые числа, не те, которые мы называли иррациональными и признали существующими, рассматривая отношение двух несоизмеримых отрезков.

Не трудно дать ответ на этот вопрос. Превратим два данных многоугольника, площади которых мы назвали через A и B, в равновеликие им треугольники (n°159 зад. 2), каждый из этих треугольников в равновеликий ему прямоугольник с тем же основанием (n° 156 добавление), а каждый из этих прямоугольников в равновеликий ему такой, чтобы у обоих прямоугольников получились одинаковые основания, (см. чер. G); пусть тогда высоты этих прямоугольников суть, h и h′, а площади их равны. соотв. площадям данных многоугольников

т.-е. A и B. Рассмотрим два отношения: 1) $\frac{h}{h'}$ и 2) $\frac{A}{B}$. Найдем самое большое число со знаменателем n, чтобы оно было меньше первого отношения $\left(\frac{h}{h'}\right)$. Для этого разделим h' на n равных частей и станем эти части откладывать на h, — пусть их уложится m с остатком x (здесь имеет место аксиома Архимеда), причем $x < \frac{h'}{n}$. Тогда искомое число есть $\frac{m}{n}$ (мы видим также, что $\frac{m+1}{n}$ есть самое малое число со знаменателем n, большее $\frac{h}{h'}$).

Построив через точки деления высот h' и h ряд прямых, параллельных основаниям прямоугольников, мы получим, что площадь B разде-



Чер. G.

лится на n равных частей и таких частей на площади A уложится m с остатком X (площадь X меньше $\frac{1}{n}$ части площади B, ибо X есть площадь прямоугольника с таким же основанием, но с меньшею высотою,— площадь X при наложении займет лишь часть площади $\frac{1}{n}$ B).

Поэтому, мы найдем, что $\frac{A-X}{B} = \frac{m}{n}$, но $A > A - X$, след. $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$ или $\frac{m}{n} < \frac{A}{B}$. Итак, даже самое большое число со знаменателем n, меньшее первого отношения $\left(\frac{h}{h'}\right)$, оказалось меньше также второго отношения $\left(\frac{A}{B}\right)$. Также, если бы мы взяли число $\frac{m+1}{n}$, самое малое число со знаменателем n большее отношения $\frac{h}{h'}$, то здесь же увидали бы, что оно также больше $\frac{A}{B}$. Отсюда заключаем, что нельзя найти такого рацио-

нального числа, чтобы оно было больше одного из наших отношений и меньше другого, т.-е. мы должны признать, что наши два отношения равны одному и тому же числу, или что $\frac{A}{B} = \frac{h}{h'}$. Таким образом отношение площадей A и B равно отношению двух отрезков. Поэтому мы должны признать, что отношение двух несоизмеримых площадей равняется одному из тех же иррациональных чисел, какие мы ввели при изучении отношений отрезков.

Иное дело, если мы обратимся к площадям, ограниченным не только прямыми, но и кривыми линиями: здесь у нас нет способа сравнивать две такие площади и вопрос об измерении таких площадей может быть разрешен лишь косвенными приемами.

Здесь мы будем заниматься измерениями площадей, ограниченных только прямыми линиями.

197. Надо, прежде всего, выбрать какую-либо площадь за единицу. Принято за единицу для измерения площадей считать площадь такого квадрата, каждая сторона которого равна линейной единице; такая площадь называется к в а д р а т н о ю единицею (см. чер. 199). Общеупотребительны: квадратный аршин — площадь такого квадрата, каждая сторона которого равна линейному аршину, квадратный фут, квадр. метр и т. д.



Чер. 199.

Необходимо еще для непосредственного измерения площади уметь откладывать на измеряемой площади ту, которая принята за единицу. Хотя с точки зрения теории это не доставляет затруднений (на основании главы XVI), но на практике такой способ был бы крайне неудобен. Оказывается, что, благодаря тому выбору единицы для измерения площадей (площадь квадрата, у которого каждая сторона равна линейной единице), который был нами сделан, вопрос об измерении площади сводится к вопросу об измерении отрезков.

198. Основною задачею является измерение площади прямоугольника.

Пусть имеем прямоугольник *ABDC* (чер. 200), площадь которого надо измерить данною квадратною единицею *M*.

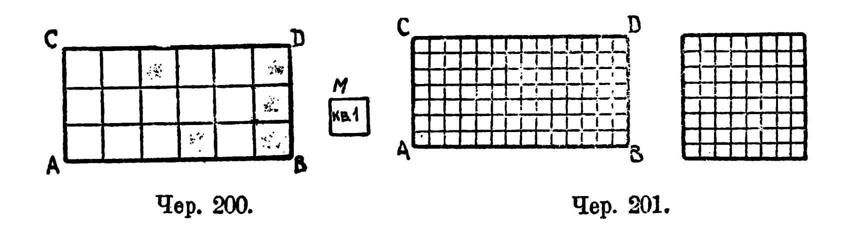
Рассмотрим сначала случай, когда сторона квадрата *M*, т.-е. линейная единица, укладывается по целому числу раз на основании *AB* прямоугольника и на его высоте *AC*. Если, напр. (как

на чертеже), эта линейная единица укладывается на основании AB — 6 раз и на высоте AC — 3 раза, то, построив ряд параллельных, мы можем разбить измеряемую площадь на 3 полосы, высота каждой из которых равна линейной единице, а каждую полосу на 6 квадратных единиц. Всего квадратных единиц получим $6 \times 3 = 18$. Следов., измеряемая площадь равна 18 квадр. единицам.

Вообще, пусть найдем:

$$AB = a \text{ лин. един.}$$
$$AC = h \text{ лин. един.},$$

где числа a и h целые; тогда, построив ряд параллельных основанию, разобьем площадь прямоугольника на h полос, а, построив ряд параллельных высоте прямоугольника, разобьем каждую полосу на a квадр. единиц. Следовательно, вся измеряемая площадь найдется умножением чисел a и h, т.-е.:



Чер. 200. Чер. 201.

$$\text{Площ. } ABDC = (ah) \text{ квадр. един.}$$

Результат можно прочесть словами:

Число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих его основание и высоту в соответственных линейных единицах.

Но пока в этом мы убедились лишь для случая, когда от измерения основания и высоты получаются целые числа.

Далее рассмотрим случай, когда стороны прямоугольника соизмеримы с линейной единицею, но эта последняя не укладывается по целому числу раз на основании и высоте прямоуголь-

ника. Тогда мы знаем, что от их измерения нашею линейною единицею получаются дробные числа. Пусть, например (чер. 201),

$$AB = 1\frac{3}{4} \text{ лин. един.,}$$

$$AC = \frac{7}{8} \text{ лин. един.}$$

Мы можем всегда привести полученные дроби к общему знаменателю и, кроме того, станем нашу линейную единицу называть главною, также и соответствующую квадратную — главною квадратною единицею; тогда для нашего примера имеем:

$$AB = 1\frac{6}{8} \text{ глав. лин. един.} = \frac{14}{8} \text{ глав. лин. един.}$$

$$AC = \frac{7}{8} \text{ глав. лин. един.}$$

Построим теперь такой квадрат, сторона которого равна $\frac{1}{8}$ доли глав. лин. единицы и назовем площадь этого квадрата побочною квадратною единицею. На чертеже главная квадратная единица разделена на побочные: их укладывается в главной 64 (8.8, что легко сосчитать на основании предыдущего случая). Следов., 1 побоч. квадр. единица $= \frac{1}{64}$ глав. квадр. един. Выразим теперь площадь нашего прямоугольника $ABDC$ в побочных квадратных единицах. Мы видим, что

$$AB = 14 \text{ побоч. лин. един.,}$$
$$AC = 7 \text{ побоч. лин. един.}$$

Так как теперь получились целые числа, то применим сюда предыдущий случай, и мы имеем:

$$\text{Площ. } ABDC = (14 . 7) \text{ побоч. квад. един.}$$

Переведем теперь полученное число в главные квадратные единицы, зная, что побоч. квадр. един. $= \frac{1}{64}$ глав. квадр. един.

Тогда получим:

Площ. $ABDC = \frac{14.7}{64}$ глав. квадр. ед. $= \left(\frac{14}{8} . \frac{7}{8}\right)$ глав. квадр. ед. $= \left(1\frac{3}{4} . \frac{7}{8}\right)$ глав. квадр. ед.

Видим, что результат предыдущего случая подтверждается и на этом примере.

Пусть теперь вообще

$$AB = a \text{ глав. лин. един.,}$$
$$AC = h \text{ глав. лин. един.,}$$

где a и h суть дробные числа. Положим, что, после приведения этих дробей к общему знаменателю, получим:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \frac{a'}{n} \text{ глав. лин. един.} \\ AC = \frac{h'}{n} \text{ глав. лин. един.} \end{array}\right\} \text{след., } a = \frac{a'}{n} \text{ и } h = \frac{h'}{n}.$$

Разделим главную линейную единицу на n равных частей и $\frac{1}{n}$ долю этой единицы назовем побочною линейною единицею; затем построим квадрат, сторона которого равна этой побочной линейной единице, — его площадь назовем побочною квадратною единицею. Тогда в главной квадратной единице умещается n^2 побочных квадр. единиц ($n . n$ — согласно предыдущему случаю). Будем выполнять измерение в побочных единицах; тогда

$$AB = a' \text{ побоч. лин. един.,}$$
$$AC = h' \text{ побоч. лин. един.,}$$

где числа a' и h'—целые. Поэтому, согласно первому разобранному нами случаю, имеем:

$$\text{Площ. } ABDC = (a' . h') \text{ побоч. квадр. един.}$$

Так как 1 побоч. квадр. един. $= \frac{1}{n^2}$ глав. квадр. един., то площ. $ABDC = \frac{a'h'}{n^2}$ глав. квадр. един. $= \left(\frac{a'}{n} . \frac{h'}{n}\right)$ глав. квадр. един. $= (ah.)$ гл. кв. ед.

Итак, между числами, выражающими площадь и стороны прямоугольника в соответствующих единицах, и для этого случая имеет место вышенайденная зависимость.

199. Эта зависимость распространяется и на случай, когда стороны прямоугольника (или, по крайней мере, одна из них) несоизмеримы с линейною единицею. В этом случае имеем:

$$AB = a \text{ лин. един.,}$$
$$AC = h \text{ лин. един.,}$$

где a и h (или одно из них) суть иррациональные числа. Мы можем измерить наши стороны с какою угодно точностью, напр., до $\frac{1}{n}$. Для этого разделим линейную единицу на n равных частей и, откладывая эти части по сторонам AB и AC, для каждой из них найдем по 2 отрезка, соизмеримых с единицею, из которых один меньше, а другой больше соответствующей стороны и разность между которыми $= \frac{1}{n}$ доли единицы. Пусть меньшие из этих отрезков выражаются числами a' и h'; тогда большие выражаются числами $a' + \frac{1}{n}$ и $h' + \frac{1}{n}$, и мы имеем

$$a' < a < a' + \frac{1}{n} \text{ и } h' < h < h' + \frac{1}{n},$$

где a' и h' суть рациональные числа — дроби со знаменателем n.

Мы можем построить теперь два прямоугольника, стороны которых соизмеримы с единицею и площади которых можно вычислить по формуле n°198: один внутренний по отношению к данному прямоугольнику, стороны которого выражаются числами a' и h', и другой внешний, стороны которого выражаются числами $a' + \frac{1}{n}$ и $h' + \frac{1}{n}$. Тогда площадь первого выражается числом $a' . h'$ и площадь второго—числом $\left(a' + \frac{1}{n}\right)\left(h' + \frac{1}{n}\right)$. Разность этих площадей выражается числом

$$\left(a' + \frac{1}{n}\right)\left(h' + \frac{1}{n}\right) - a'h' = \frac{a' + h'}{n} + \frac{1}{n^2} \qquad (1)$$

Так как площадь данного прямоугольника заключена между площадями двух построенных прямоугольников, то разность между площадями данного и одного из построенных должна выразиться числом, меньшим только что найденного. Поэтому заключаем:

1) Измерив площадь, напр., внутреннего прямоугольника и приняв ее за приближение к площади данного, мы делаем ошибку, меньшую выше найденной разности, — последняя служит, следовательно, пределом этой ошибки. Увеличивая число n (а его мы можем выбрать по своему произволу), мы можем сделать этот предел как угодно малым: знаменатели дробей в выражении (1) могут быть сделаны сколь угодно большими, а числители остаются меньше определенного числа (всегда $a' < a$ и $h' < h$).

2) Чтобы найти точное числовое выражение для площади нашего прямоугольника, надо найти такое число, которое было бы всегда заключено между рациональными числами $a' . h'$ и $\left(a' + \frac{1}{n}\right) . \left(h' + \frac{1}{n}\right)$, как бы велико n ни было, так как площадь данного прямоугольника всегда заключена между площадями соответствующих внутреннего и внешнего прямоугольника. Теория иррациональных чисел учит, что таким числом является произведение $a . h$, для которого рациональные числа $a' . h'$ и $\left(a' + \frac{1}{n}\right)\left(h' + \frac{1}{n}\right)$ служат приближениями (первое с недостатком, второе с избытком), предел погрешности которых может быть найден и увеличением числа n может быть сделан как угодно мал.

Что такое число существует, ясно из мелкого шрифта n°196: отношение всяких двух площадей, ограниченных прямыми линиями, а, следовательно, и отношение площади нашего прямоуг-ка ABDC к квадратной единице может быть признано равным отношению двух отрезков, а последнее всегда признается нами за определенное число, рациональное или иррациональное. Чер. H, где M обозначает площадь, принимаемую за квадратную единицу, а m — отрезок, принимаемый за линейную единицу, построен так, как сказано в зад. 1 n°159. Поэтому здесь получаем, что прямоуг-к CKFE (основание которого EF = m) равновелик данному прямоугольнику ABDC. Поэтому $\frac{\text{пл. ABDC}}{\text{M}} = \frac{\text{пл. CKFE}}{\text{M}} = \frac{\text{CE}}{\text{m}}$ (последнее на основании n°196: площади CKFE и M можно рассматри-

вать, как площади прямоуг-ков, имеющих равные основания m и различные высоты (CE и m).

Итак, во всех случаях имеем, называя число, выражающее площадь прямоугольника в квадр. един., чрез Q:

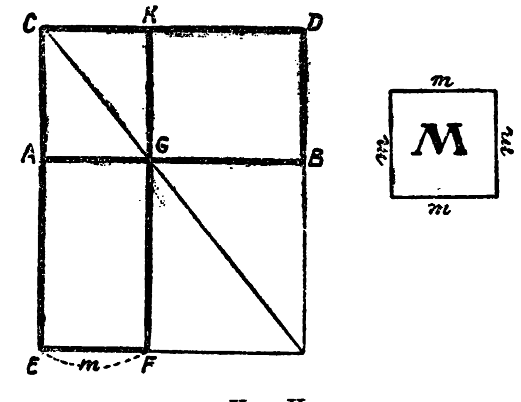
$$Q = a \cdot h.$$

Подробно эта формула читается:

Число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих его основание и высоту в соответствующих линейных единицах.

Коротко, хотя и неправильно, читают:

Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.



Чер. Н.

200. Мы знаем (n°154), что параллелограмм равновелик прямоугольнику, имеющему такие же основание и высоту; поэтому теперь имеем (выражая сокращенно):

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

201. Мы знаем (n°156), что площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, имеющего такие же основание и высоту. Поэтому:

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов (один катет примем за основание; тогда другой явится его высотою).

202. Из n°163 мы знаем, что трапеция равновелика треугольнику, имеющему такую же высоту, основанием которого служит сумма параллельных сторон трапеции. Поэтому имеем:

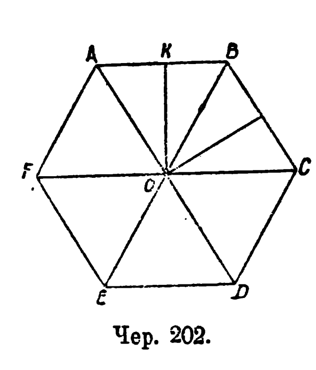
Площадь трапеции равна половине произведения суммы ее параллельных сторон на высоту;

или:

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

203. Найдем еще, как измерять площадь правильного многоугольника.

Пусть имеем правильный многоугольник $ABCDEF$ (чер. 202). Найдем его центр O (n°151) и соединим точку O с вершинами A, B, C и т. д. многоугольника. Тогда увидим, что площадь многоугольника слагается из площадей треугольников OAB, OBC и т. д. Примем сторону AB в $\triangle AOB$ за основание и пусть от измерения AB линейною единицею получится число a. Построим высоту OK в $\triangle OAB$ — OK является, как мы знаем, апоѳемою нашего правильного многоугольника — и назовем чрез p число, полученное от измерения апоѳемы OK линейною единицею.



Чер. 202.

Тогда площ. $\triangle AOB = \frac{a \cdot p}{2}$ квадр. един. (n°199).

Пусть сторон у нашего многоугольника n; тогда и треугольников получается тоже n и они все равны между собою. Следовательно, площадь многоугольника выразится числом $\frac{a \cdot p}{2} \cdot n = \frac{an \cdot p}{2}$, или, называя чрез Q число, выражающее площадь в квадратных единицах, имеем:

$$Q = \frac{(an) \cdot p}{2}.$$

Здесь множители a и n мы заключили в скобки, чтобы показать, что мы их произведение хотим считать за одно число: число a выражает одну сторону многоугольника, но у много-

угольника n сторон и все они равны между собою, — следовательно,

$$AB + BC + CD + DE + , \qquad = AB \,.\, n.$$

Сумма всех сторон многоугольника называется его периметром (n°79); следовательно, число $a.n$ выражает периметр нашего многоугольника в линейных единицах. Поэтому:

число, выражающее площадь правильного многоугольника в квадратных единицах, равно половине произведения чисел, выражающих его периметр и апофему в соответствующих линейных единицах, или, сокращенно:

Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на апофему.

204. Чтобы измерить площадь какого-нибудь многоугольника, разбивают его на треугольники и трапеции или превращают его в равновеликий ему треугольник, измеряют отрезки, нужные для вычисления площадей полученных треугольников и трапеций, и затем вычисляют площади каждого треугольника и каждой трапеции.

205. Упражнения. 1. Периметр прямоугольника равен 40 дм., а его высота составляет $\frac{2}{3}$ его основания. Вычислить его площадь.

2. Стороны параллелограмма равны соответственно 20 и 25 дм., а высота, опущенная на меньшую сторону, равна 15 дм. Вычислить другую высоту этого параллелограмма.

3. Две стороны треугольника равны соответственно 18 и 12 дм. а высота, опущенная на большую из них, равна 20 дм. Вычислить высоту, опущенную на меньшую из данных сторон.

4. Вычислить площадь квадрата, описанного около круга, радиус которого равен 8 сант.

5. Прямоугольник равновелик сумме площадей двух треугольников, основание одного из которых равно 12 сант. и высота равна 8 сант., а основание и высота другого, каждая в 2 раза меньше соответствующего основания и высоты первого. Вычислить высоту этого прямоугольника, если его основание равно среднему арифметическому между основаниями треугольников.

6. Площадь трапеции равна 80 квадр. дм., и ее высота равна 8 дм. Вычислить ее параллельные стороны, если одна из них на 4 дм. больше другой.

7. Высота треугольника равна 17 дм., а средняя линия этого треугольника, перпендикулярная к указанной высоте, равна 6 дм. Вычислить площадь этого треугольника.

В следующих задачах не указано, какими именно линейными и какими квадратными единицами произведено измерение. Само собою разумеется, что площадь выражается в квадратных единицах, а отрезки — в линейных; в каждой задаче квадратные и линейные единицы должны быть соответствующими друг другу.

8. Вычислить площадь ромба, если его диагонали равны соответственно 46 и 30.

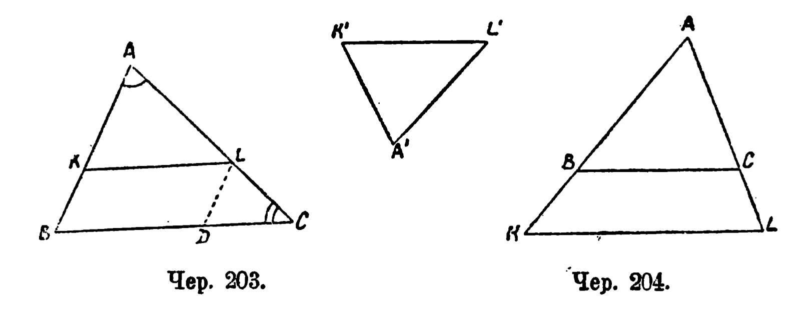
9. Площадь трапеции равна 90, ее высота равна 10. Вычислить ее параллельные стороны, если одна из них в 2 раза больше другой.

10. Вычислить площадь квадрата, вписанного в круг, принимая за единицу площадь квадрата, сторона которого равна радиусу круга. (Разбить квадрат диагональю на 2 треугольника).

ГЛАВА XXI.

Подобие треугольников.

206. Мы знаем (n°175), что если $\angle A$ (чер. 203 или 204) пересечь двумя параллельными KL и BC, то отношение двух



Чер. 203. Чер. 204.

любых отрезков на одной стороне этого угла равно отношению двух соответствующих отрезков на другой (напр., $\frac{AK}{KB}=\frac{AL}{LC}$; $\frac{AB}{AK}=\frac{AC}{AL}$ и т. д.). Но мы видим, что у нас получились еще отрезки на самых параллельных, а именно KL и BC. Возникает вопрос, нельзя ли из отрезков AL, LC и AC, лежащих на одной

стороне нашего угла A, выбрать такие два, чтобы их отношение равнялось отношению отрезков KL и BC.

Для этой цели мы прежде всего отрезок KL перенесем на прямую BC, для чего надо построить $LD \parallel AB$; тогда $BD = KL$. Тогда вместо отрезков KL и BC мы можем рассматривать отрезки BD и BC, которые расположены на стороне CB угла C. Так как $\angle C$ оказался пересеченным двумя параллельными, а именно прямыми AB и LD, то, применяя n°175 к углу C, мы найдем

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AL}{AC} \text{ или } \frac{KL}{BC} = \frac{AL}{AC}.$$

Вопрос решен: удалось найти два отрезка AL и AC на стороне AC так, что их отношение $= \frac{KL}{BC}$. Зная еще, что $\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC}$, мы можем теперь написать равенства:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC} = \frac{KL}{BC}.$$

Рассматривая эти равенства, мы приходим к заключению, что ими связаны стороны двух полученных треугольников, а именно $\triangle AKL$ и $\triangle ABC$. Возникает новый вопрос: не связаны ли как-либо и углы этих треуг-ков?

На последний вопрос ответ легко найти: $\angle A$ у наших треугольников общий, $\angle K = \angle B$, как соответственные при параллельных KL и BC и секущей AB, и $\angle L = \angle C$, как соответственные при тех же параллельных, но при секущей AC.

Мы можем перенести $\triangle AKL$ (чер. 203) в другое место, или, что тоже самое, построить новый $\triangle A'K'L'$, равный $\triangle AKL$; его стороны и углы будут соответственно равны сторонам и углам $\triangle AKL$; $AK = A'K'$, $AL = A'L'$, $KL = K'L'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle K = \angle K'$, $\angle L = \angle L'$.

Тогда мы получим $\triangle A'K'L'$, находящийся в такой же зависимости с $\triangle ABC$, как и $\triangle AKL$:

1) у этих треугольников углы попарно равны: $\angle A' = \angle A$, $\angle K' = B$ и $\angle L' = \angle C$;

2) для сторон имеем пропорции:

$$\frac{A'K'}{AB}=\frac{A'L'}{AC}=\frac{K'L'}{BC}\,. \qquad (1)$$

Надо обратить внимание, что две стороны каждого отношения не случайно соединены в одно отношение, — нельзя, например, написать $\frac{A'L'}{AB}=\frac{A'K'}{BC}=\frac{K'L'}{AC}$. Надо уметь находить те стороны, которые должны быть членами одного отношения. Проще всего это сделать по углам треугольников: можно подметить, что стороны каждого отношения в равенствах (1) лежат в треугольниках против равных углов ($A'K'$ против $\angle L$ и AB против равного этому угла C и т. д.). Принято называть те стороны, которые служат членами одного отношения, **сходственными** (сторона $A'K'$ сходственна со стороною AB, $A'L'$—с AC и $K'L'$—с BC), причем **сходственные стороны расположены в наших треугольниках против равных углов.**

Равенства (1) можно прочесть сокращенно словами:

Стороны треугольника $A'K'L'$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle ABC$.

Слово „пропорциональны" означает: отношение одной пары сходственных сторон треугольников $A'K'L'$ и ABC равно отношению другой пары и равно отношению третьей пары.

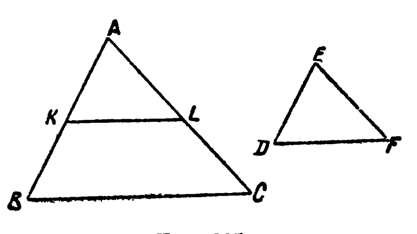
Треугольники, обладающие двумя найденными выше признаками, называются подобными. Для обозначения подобия треугольников употребляют знак $\backsim$. Мы получили: $\triangle AKL \backsim \triangle ABC$ и также $\triangle A'K'L' \backsim \triangle ABC$.

Можно теперь установить:

Два треугольника называются подобными, если углы одного равны попарно углам другого и сходственные стороны их пропорциональны.

Замечание. Возьмем из равенств (1) лишь одно, например, $\frac{A'K'}{AB}=\frac{A'L'}{AC}$. Применяя сюда свойство n°178, получим: $\frac{A'K'}{A'L'}=$ $=\frac{AB}{AC}$, т.-е. **отношение двух сторон одного треугольника равно отношению двух сходственных сторон другого $\triangle$-а, подобного первому.**

207. Основной признак подобия треугольников. Согласно предыдущему n°, мы можем построить бесчисленное множество треугольников, подобных данному: для этого надо данный треугольник пересекать различными прямыми, параллельными одной из его сторон, и затем, если угодно, переносить каждый получаемый треугольник в другое место плоскости. Во всех получаемых треугольниках углы остаются неизменными, а отношение какой-либо стороны одного к сходственной стороне данного (м а с ш т а б п о д о б и я) меняется. Поэтому возникает мысль, недостаточно ли для подобия двух треугольников только равенства их углов.

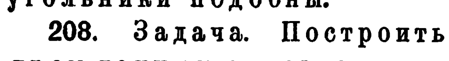


Чер. 205.

Построим 2 треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (чер. 205) так, чтобы $\angle A = \angle E$ и $\angle B = \angle D$. Тогда прежде всего находим, что $\angle C = \angle F$ (ибо сумма углов каждого треугольника $= 2d$).

Наложим $\triangle DEF$ на $\triangle ABC$ так, чтобы, напр., точка E попала в точку A. Тогда вращением около этой точки можно достигнуть в силу равенства $\angle E = \angle A$ того, чтобы ED и EF пошли соответственно по AB и AC; сторона DF должна занять такое положение KL, чтобы $\angle AKL = \angle D = \angle B$ и $\angle ALK = \angle F = \angle C$, т.-е., чтобы $KL \parallel BC$, так как получаются равные соответственные углы.

Отсюда заключаем, что $\triangle DEF$ можно получить построением предыдущего n° и, следов., что $\triangle DEF \sim \triangle ABC$. Итак, е с л и д в а у г л а о д н о г о т р е у г о л ь н и к а р а в н ы с о о т в е т с т в е н н о д в у м у г л а м д р у г о г о, т о э т и т р е у г о л ь н и к и п о д о б н ы.



Чер. 206.

208. З а д а ч а. П о с т р о и т ь **четвертый пропорциональный** к т р е м д а н н ы м о т р е з к а м.

Пусть даны отрезки a, b и c (чер. 206); требуется построить такой 4-й отрезок x, чтобы имела место пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Строим две произвольных, пересекающихся в точке O, прямых AB и CD и откладываем от точки O на одной из них отрезки первого отношения: $OA=a$ $OB=b$ (можно в одном, или в разных направлениях от точки O) и на другой прямой известный отрезок второго отношения $OC=c$. Затем соединим прямою концы тех отрезков, которые служат предыдущими членами нашей пропорции (если бы один из них не был известен, то надо соединить концы отрезков, служащих последующими членами данной пропорции); получим прямую AC, соединяющую концы отрезков a и c. Затем чрез точку B строим прямую $BD \parallel AC$. Тогда получим $\triangle OBD \sim \triangle OAC$ ($\angle O = \angle O$, как вертикальные и $\angle C = \angle D$, как внутренние накрест-лежащие, что достаточно по предыдущему n° для подобия наших треугольников). Отсюда имеем (n°206) пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{OD},$$

откуда вытекает, что искомый отрезок $x=OD$.

Если бы требовалось удовлетворить пропорции $\frac{x}{c}=\frac{a}{b}$, то надо было бы соединить точки B и C и чрез точку A построить $AL \parallel BC$; тогда отрезок OL был бы искомым.

З а м е ч а н и е. Если мы построили отрезок x так, чтобы, напр., удовлетворилась пропорция $\frac{x}{c}=\frac{a}{b}$, то всякий другой отрезок x' не удовлетворит этой пропорции; если $x' > x$, то $\frac{x'}{c} > \frac{x}{c}$ и, следоват., $\frac{x'}{c} > \frac{a}{b}$, если $x' < x$, то $\frac{x'}{c} < \frac{x}{c}$ и $\frac{x'}{c} < \frac{a}{b}$.

209. Другие признаки подобия треугольников. 1) Е с л и д в е с т о р о н ы о д н о г о т р е у г о л ь н и к а п р о п о р ц и о н а л ь н ы д в у м с т о р о н а м д р у г о г о и у г л ы м е ж д у н и м и р а в н ы, т о э т и д в а т р е у г о л ь н и к а п о д о б н ы.

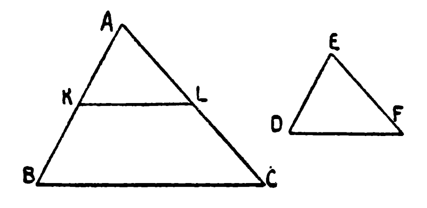
Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 207); возьмем произвольный отрезок ED и построим, согласно n°208, отрезок x так, чтобы имела место пропорция $\frac{x}{AC}=\frac{ED}{AB}$. Наконец, построим $\triangle EDF$ так.

чтобы у него одною стороною служил отрезок ED, другою стороною отрезок $EF=x$ и, наконец, чтобы $\angle E=\angle A$. Тогда $\triangle EDF$ и $\triangle ABC$ связаны между собою соотношениями:

1) $\angle E=\angle A$ и 2) $\frac{EF}{AC}=\frac{ED}{AB}$.

Подобны ли эти треугольники?

Для получения ответа на этот вопрос надо лишь заметить, что мы можем построить треугольник, равный $\triangle EDF$, иным, более простым способом. Для этого отложим на стороне AB отрезок $AK=ED$ и построим $KL \parallel BC$; тогда $\triangle AKL \sim \triangle ABC$ (n°197) и, след., $\frac{AL}{AC}=\frac{AK}{AB}$.



Чер. 207.

Так как $AK=ED$ и так как можно лишь одним способом (замечание n° 208) удовлетворить пропорции $\frac{x}{AC}=\frac{ED}{AB}$, то отсюда заключаем, что $EF=AL$ и что $\triangle AKL=\triangle EDF$. Поэтому $\triangle EDF$ наложением можно совместить с $\triangle AKL$ и, следовательно, $\triangle EDF \sim \triangle ABC$. Этим оправдывается признак пропорциональности, изложенный в начале этого n°.

2) **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.**

Пусть имеем $\triangle ABC$ (чер. 207); возьмем отрезок ED и построим согласно n° 208 два других отрезка x и y так, чтобы имели место пропорции: $\frac{x}{AC}=\frac{ED}{AB}$ и $\frac{y}{BC}=\frac{ED}{AB}$. Построим затем по трем сторонам ED, x и y треугольник EDF ($EF=x$, $DF=y$).

Тогда $\triangle EDF$ и $\triangle ABC$ связаны между собою соотношениями:

1) $\frac{EF}{AC}=\frac{ED}{AB}$ и 2) $\frac{DF}{BC}=\frac{ED}{AB}$

или, короче:

$$\frac{EF}{AC}=\frac{DF}{BC}=\frac{ED}{AB}.$$

Подобны ли эти треугольники?

Для решения этого вопроса заметим, что можно иным, более простым, способом построить треугольник, равный $\triangle EDF$.

Для этого отложим на стороне AB отрезок $AK = ED$ и построим $KL \parallel BC$; тогда (n° **206**) получим $\triangle AKL \sim \triangle ABC$ и, след.,

$$\frac{AL}{AC} = \frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB}.$$

Так как отрезок $AK = ED$ и так как, согласно замечанию n° 208, можно построить лишь один отрезок, удовлетворяющий пропорции $\frac{x}{AC} = \frac{ED}{AB}$, то заключаем, что $AL = EF$; также найдем, что $KL = DF$, откуда следует, что $\triangle EDF = \triangle AKL$, и наложением можно $\triangle EDF$ совместить с $\triangle AKL$ (иногда, может-быть, придется для этого повернуть $\triangle EDF$ другою стороною). Поэтому $\triangle EDF \sim \triangle ABC$.

Этим оправдывается изложенный признак.

Подобным образом можно найти еще несколько признаков подобия, как вообще треугольников, так и каких-либо особых треугольников. Наприм., *если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то эти треугольники подобны*. Выяснение его справедливости основывается: 1) на замечании n° 208 и 2) на признаке равенства прямоугольных треугольников (n° **74**, признак 4).

Замечание. В некоторых из следующих задач придется находить отношения отрезков, измеренных какою-либо единицею. Если, например, отрезок $x = 7\frac{1}{2}$ лин. един. и отрезок $y = \frac{3}{10}$ лин. един. (линейная единица одна и та же), то, чтобы найти отношение отрезка x к отрезку y, надо выразить отрезок x числом, принимая за единицу отрезок y. Если $y = \frac{3}{10}$ лин. единиц., то лин. един. $= \frac{10}{3}\,y$ и, следовательно,

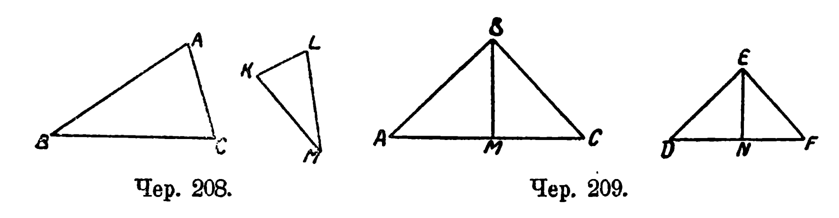
$$x = \left(7\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}\right) y, \text{ откуда } \frac{x}{y} = 7\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = 7\frac{1}{2} : \frac{3}{10},$$

т.-е. **для нахождения отношения отрезков, измеренных какою-либо одною единицею, надо найти отношение чисел, выражающих наши отрезки, а отношение чисел, как известно из арифметики, находится при помощи деления.**

210. Упражнения. 1. Даны 2 прямоугольных треугольника; острый угол одного из них $= 41°$, а острый угол другого $= 49°$. Узнать, подобны ли эти треугольники.

2. Даны $\triangle ABC$ и $\triangle KLM$ (чер. 208) так, что $\angle B = \angle M$ и $AB = 15$ дм., $BC = 18$ дм., $ML = 12$ дм. и $MK = 10$ дм. Подобны ли эти треугольники? Если они подобны, то вычислить сторону AC, зная, что сторона $KL = 5\frac{1}{2}$ дм.

3. Даны $\triangle ABC$ и $\triangle KLM$ (чер. 208) так, что $AB = 18$ дм., $BC = 20$ дм., $AC = 8$ дм., $KL = 6$ дм., $KM = 13\frac{1}{2}$ дм., $ML = 15$ дм. Подобны ли эти треугольники? Как здесь узнать сходственные стороны?



Чер. 208. Чер. 209.

4. В треугольниках ABC и KLM дано: $AB = 16$ дм., $AC = 8$ дм. $BC = 20$ дм., $KL = 5$ дм., $MK = 10$ дм. и $ML = 12$ дм. Подобны ли эти треугольники? Если не подобны, то как надо изменить сторону ML, чтобы треугольники оказались подобны?

5. Даны 2 подобных треугольника, стороны одного из которых равны соотв. 10, 14 и 16 дм. и большая сторона другого $= 20$ дм. Найти остальные 2 стороны второго треугольника.

6. Дан треугольник. Пользуясь способом n° 206, построить другой треугольник, подобный данному так, чтобы каждое отношение стороны нового треугольника к сходственной стороне второго было $= \frac{3}{4}$.

Сделать такое же построение, если вышеуказанное отношение должно равняться $2\frac{1}{2}$.

211. Отношения высот и площадей подобных треугольников. Пусть имеем $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (чер. 209). Следовательно, мы имеем:

$$\angle A = \angle D,\ \angle B\ (\angle ABC) = \angle E\ (\angle DEF) \text{ и } \angle C = \angle F \quad (1)$$

и

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad \ldots (2)$$

Построим высоты BM и EN в наших треугольниках, опуская перпендикуляры на сходственные стороны; станем называть эти высоты сходственными. Тогда $\triangle ABM \backsim \triangle DEN$, так как у них $\angle A = \angle D$ на основании равенств (1) и $\angle AMB = \angle DNE$, как прямые углы ($BM \perp AC$ и $EN \perp DF$), а этого достаточно для подобия наших треугольников (n° **207**) и из их подобия получаем:

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE}.$$

На основании равенств (2) можем последнее равенство продолжить:

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

т.-е. отношение сходственных высот подобных треугольников равно отношению сходственных сторон.

Из ряда последних равных отношений обратим внимание на пропорцию.

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AC}{DF}.$$

(Отношение сходственных высот = отношению оснований).

212. В n° 209 было указано, как находить отношение двух отрезков, измеренных одною и тою же единицею. Тоже относится и к нахождению отношения двух площадей, измеренных одною и тою же квадратною единицею: это отношение находится делением чисел, выражающих наши площади.

Мы будем в этом n°, а равно во многих случаях и дальше под обозначением, наприм., AB понимать число, выражающее отрезок AB в каких-либо линейных единицах, также под обозначением „площ. $\triangle ABC$“ будем понимать число, выражающее площадь $\triangle ABC$ в квадратных единицах. При разборе одного вопроса все отрезки будут считаться измеренными одною и тою же линейною единицею, а все площади — соответствующими квадратными единицами.

Мы знаем (n° **201**), что для измерения площади треугольника в квадратных единицах надо измерить его основание и высоту соответствующею линейною единицею и взять половину произведения полученных чисел.

Теперь, употребляя обозначение согласно вышесделанному условию, имеем для $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (чер. 209)

$$\text{площ. } \triangle ABC = \frac{AC \cdot BM}{2} \text{ и площ. } \triangle DEF = \frac{DF \cdot EN}{2}.$$

Найдем отношение площадей наших треугольников делением

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle DEF} = \frac{AC \cdot BM}{2} \quad \frac{DF \cdot EN}{2} = \frac{AC \cdot BM}{DF \cdot EN} = \frac{AC}{DF} \cdot \frac{BM}{EN}$$

т.-е. **отношение площадей двух треугольников равно произведению отношения их оснований на отношение их высот.**

Примем теперь во внимание, что мы имеем дело с подобными треугольниками — мы считаем, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Тогда из предыдущего n° имеем:

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AC}{DF}.$$

Заменяя в формуле, выражающей отношение площадей треугольников, отношение высот равным ему отношением оснований, получаем:

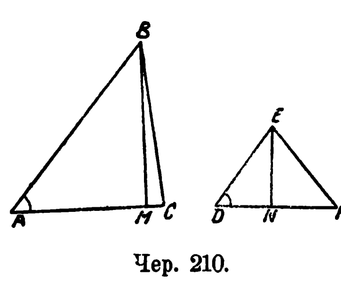
$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle DEF} = \frac{AC}{DF} \cdot \frac{AC}{DF} = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2.$$

Можем также сказать, что это отношение $= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$. Итак, **отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.**

Этот результат согласуется с найденным в n° 160 (упражнения 5, 6 и 7).

Упражнение. Найти отношение площадей подобных треугольников, данных в n° 210 (упражнения 2, 3, 5 и 6).

213. Отношение площадей треугольников, имеющих по равному углу. Пусть в $\triangle$ ABC и $\triangle$ DEF (чер. 210) имеем $\angle A = \angle D$, а другие углы не равны. Тогда наши треугольники не подобны. Мы так же, как и в предыдущем n°, построим высоты BM и EN этих треугольников и найдем делением отношение их площадей:



Чер. 210.

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle DEF} = \frac{AC \cdot BM}{DF \cdot EN} = \frac{AC}{DF} \cdot \frac{BM}{EN} \quad . (1)$$

Далее находим $\triangle ABM \sim \triangle DEN$ ($\angle A = \angle D$ по условию и $\angle M$ и $\angle N$ прямые); следовательно:

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE} \quad . (2)$$

Но теперь уже нельзя заменить отношение высот $\left(\frac{BM}{EN}\right)$ отношением оснований $\left(\frac{AC}{DF}\right)$, так как эти треугольники не подобны. Пользуясь (2), из (1) имеем:

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle DEF} = \frac{AC}{DF} \cdot \frac{AB}{DE},$$

т.-е. отношение площадей двух треугольников, имеющих по равному углу, равно произведению отношений сторон, составляющих эти углы.

Упражнение. Дан треугольник; построить другой треугольник так, чтобы один угол остался неизменным, а стороны, составляющие этот угол, увеличились одна в 2 раза и другая в 3 раза. Как увеличится его площадь? Ответ, легко находимый вычислением, желательно выяснить геометрически.

ГЛАВА XXII.

Следствия из подобия треугольников.

214. Построение 4-го пропорционального отрезка, данное в n° 208, важно для решения некоторых задач на построение.

З а д а ч а. Д а н н ы й п а р а л л е л о г р а м м п р е в р а т и т ь в р а в н о в е л и к и й е м у п р я м о у г о л ь н и к с д а н н ы м о с н о в а н и е м.

Обозначим основание данного параллелограмма через a, его высоту чрез h и данное основание искомого прямоугольника

чрез b, а искомую высоту прямоугольника чрез x. Тогда мы знаем что площадь данного параллелограмма $= ah$, площадь искомого прямоугольника $= bx$, где на a, b, h и x надо смотреть, как на числа, полученные от измерения соответствующих отрезков одною и тою же линейною единицею. Согласно требованию задачи, имеем:

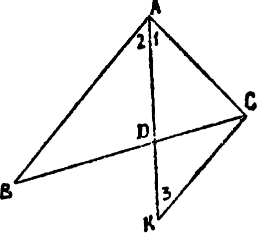
$$bx = ah,$$

откуда

$\frac{x}{a} = \frac{h}{b}$. (Другой способ решения дан в n° 159, зад. 1).

Так же решается (двумя способами) задача: **превратить данный треугольник в равновеликий ему прямоугольник**. Здесь придется в пропорции, которой должна удовлетворять искомая высота прямоугольника, взять не всю высоту треугольника, а ее половину.

215. Построим биссектор AD внутреннего угла A треугольника ABC (чер. 211). Возникает вопрос, как делит этот биссектор противолежащую сторону BC треугольника?



Чер. 211.

Для его выяснения продолжим AD и чрез точку C построим прямую $CK \parallel AB$; пусть AD и CK пересекаются в точке K. Тогда получим два подобных треугольника: $\triangle ABD$ и $\triangle CDK$ (у них углы при точке K равны, как вертикальные, и $\angle 2$ или $\angle BAD = \angle 3$ или $\angle DKC$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных AB и CK и секущей AK). Из их подобия имеем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CK} \qquad (1)$$

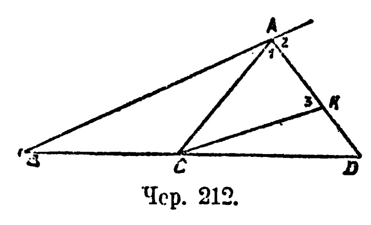
Рассмотрим теперь $\triangle ACK$. Мы знаем, что $\angle 1 = \angle 2$ (AD есть биссектор $\angle A$) и $\angle 2 = \angle 3$ (уже было выяснено), следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, откуда заключаем, что $CK = AC$ (против равных углов в треугольнике лежат равные стороны).

Заменим в пропорции (1) отрезок CK равным ему отрезком AC; получим:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},$$

т.-е. биссектор внутреннего угла треугольника делит противоположную его сторону на такие 2 части, что их отношение равно отношению двух других сторон треугольника.

216. Подобным свойством обладает биссектор и внешнего угла треугольника. Построим биссектор AD внешнего угла при вершине A треугольника ABC (чер. 212); пусть он пересекает сторону BC в точке D.



Чер. 212.

Пронумеруем углы, как на чертеже, цифрами 1, 2 и 3; тогда $\angle 1=\angle 2$. Построим $CK \parallel AB$, и пусть AD и CK пересекаются в точке K. Тогда $\triangle DAB \sim \triangle DKC$ (согласно построению n° 206) и из их подобия имеем:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{CK} \qquad (1)$$

$\angle 3=\angle 2$, как внутренние накрест-лежащие при параллельных CK и AB и секущей AK, а так как $\angle 1=\angle 2$, то отсюда следует, что $\angle 1=\angle 3$ и, следовательно, $CK=AC$ (против равных углов лежат равные стороны в $\triangle ACK$). Заменяя в пропорции (1) отрезок CK равным ему отрезком AC, найдем:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

Словами формулировать это труднее, чем в предыдущем n°:

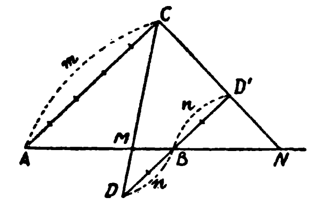
Биссектор внешнего угла треугольника пересекает противоположную сторону (рассматриваемую, как бесконечная прямая) в такой точке, что отношение ее расстояний от двух вершин треугольника, лежащих на этой стороне, равно отношению двух других сторон треугольника.

Говорят иногда вместо этого:

Биссектор внешнего угла треугольника делит противоположную сторону внешним образом в отношении, равном отношению двух других сторон, а биссектор внутреннего угла делит противоположную сторону внутренним образом в том же отношении.

217. Задача. Разделить данный отрезок внутренним и внешним образом в данном отношении.

Пусть дан отрезок AB (чер. 213); требуется найти сначала между точками A и B такую точку M, чтобы отношение ее расстояний от A и B равнялось данному числу $\frac{m}{n}$ (вообще говоря, данное число — дробь; ее числитель $= m$ и ее знаменатель $= n$; если данное число целое, то $n = 1$).



Чер. 213.

Для решения нашей задачи построим две прямых AC и BD под любым углом к AB, но непременно параллельных между собою, и отложим от A отрезок AC, содержащий m каких-либо частей, а от B в обратном направлении отложим отрезок BD, содержащий таких же n частей; тогда $\frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$. Соединив точки C и D, получим точку пересечения M прямых AB и CD, — она и есть искомая: $\triangle MAC \sim \triangle MDB$, следовательно, $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$.

Легко увидать, что другой такой точки между A и B найти нельзя: если мы передвинем точку M вправо (по направлению к B), то предыдущий член отношения $\frac{AM}{MB}$ увеличится, от чего самое отношение также увеличится, а последующий член (MB) уменьшится, отчего самое отношение еще увеличится; точно так же, передвинув M влево (по направлению к A), мы преды-

дущий член уменьшим, а последующий увеличим — от обеих причин отношение уменьшается.

Чтобы разделить отрезок AB внешним образом в отношении, равном числу $\frac{m}{n}$, или чтобы найти вне отрезка AB такую точку N, чтобы отношение расстояний этой точки от A и B было равно данному числу $\frac{m}{n}$ $\left(\text{т.-е., чтобы } \frac{AN}{BN}=\frac{m}{n}\right)$, надо на прямой DD', которая параллельна прямой AC, от точки B отложить в том же направлении, в каком откладывали отрезок AC, отрезок BD', состоящий из n таких отрезков, которых в AC мы уложили m. Тогда, соединив точки C и D' и продолжив прямую CD' до пересечения с AB в точке N (если $m=n$ или если $\frac{m}{n}=1$, то $CD' \parallel AB$ и точки N не существует), увидим, что точка N и есть искомая: $\triangle ACN \backsim \triangle BD'N$, следовательно, $\frac{AN}{BN}=\frac{AC}{BD'}=\frac{m}{n}$.

Здесь также можно увидать, что другой такой точки нет. Для этого надо лишь отношение $\frac{AN}{BN}$ несколько преобразовать:

$$\frac{AN}{BN}=\frac{AB+BN}{BN}=\frac{AB}{BN}+1.$$

(На нашем чертеже дробь $\frac{m}{n}$ предполагается неправильной, т.-е. $m>n$ и поэтому точка N находится правее B; если бы дробь $\frac{m}{n}$ была правильною, то точка N была бы расположена влево от A, и тогда, чтобы применить наше рассуждение к этому случаю, следует рассмотреть обратное отношение $\left.\frac{BN}{AN}\right)$.

Мы видим отсюда, что если точку N передвинуть, то отрезок BN изменится, а предыдущей член отношения (AB) не изменится, а поэтому и все первое слагаемое $\frac{AB}{BN}$ изменится; второе слагаемое 1 не изменится; следовательно, вся сумма $\frac{AB}{BN}+1$

меняется с изменением BN, откуда и заключаем, что другой такой точки быть не может.

Замечание. Можно было бы данное отношение дать не числом, а отношением двух данных отрезков; тогда на прямых AC и DD' и следует откладывать эти отрезки.

4 точки A, B, M и N, расположенные на одной прямой, две из которых (A и B) были даны, а две другие были найдены при решении этой задачи, являются основою, из которой вытекает целый отдел геометрии, не входящий в обычный элементарный курс. Эти четыре точки, обладающие свойством, что $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}$, называются **гармоническими** точками.

218. Если мы усвоим мысль, выясненную в предыдущем n°, что отрезок допускает лишь одно его разделение в данном отношении внутренним образом и лишь одно — внешним образом, то отсюда найдем:

1) Если одна сторона треугольника разделена внутренним образом на 2 части, отношение которых равно отношению двух его других сторон и точка деления соединена с противоположною вершиною, то последняя прямая является биссектором внутреннего угла треугольника при этой вершине.

В самом деле, в данном отношении внутренним образом отрезок допускает лишь одно разделение, а то разделение, о котором идет здесь речь, производится, как мы знаем (*n°* **215**), биссектором угла — следовательно, указанная прямая и есть биссектор угла.

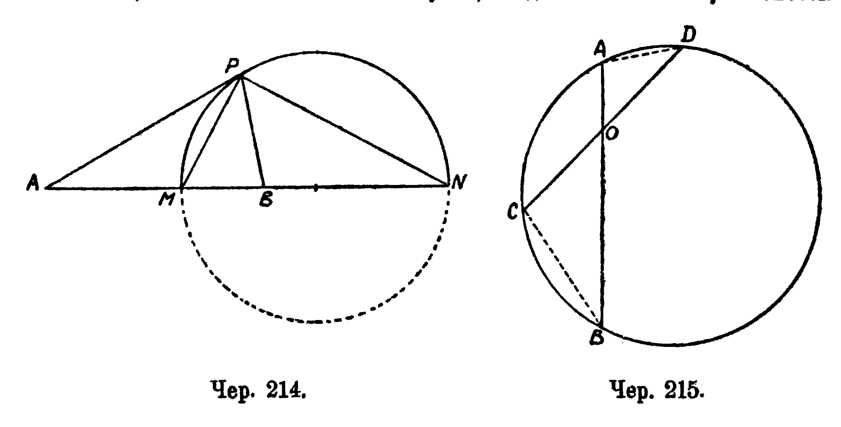
2) Если одна из сторон треугольника разделена внешним образом на 2 части, отношение которых равно отношению двух его других сторон, то прямая, соединяющая точку деления с противоположною вершиною, должна быть биссектором внешнего угла при этой вершине (объяснение сходно с предыдущим, надо лишь сослаться на n° 216).

219. Пусть даны 2 точки A и B (чер. 214); тогда на прямой AB можно найти 2 точки (одну внутри отрезка AB, а другую—вне его) так, чтобы отношение расстояний каждой из них от A и B было равно данному числу, т.-е., чтобы $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}=k$, где k данное число (целое, дробное или даже иррациональное).

Возникает вопрос, не существует ли где-либо вне прямой такой точки P, чтобы отношение ее расстояний от A и B равнялось тому же числу k.

Допустим, что нам удалось найти такую точку P; тогда $\frac{PA}{PB} = k$, откуда имеем $\frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PB}$ и $\frac{AN}{BN} = \frac{PA}{PB}$ (каждое из этих отношений равно числу k).

Мы видим, что у нас получается $\triangle$ APB, в котором сторона AB разделена в точке M внутренним образом, а в точке N внешним образом в отношении, равном отношению двух других его сторон, а это, как мы знаем, возможно лишь в том случае, когда PM и PN суть биссек-



Чер. 214. Чер. 215.

торы: первый—внутреннего $\angle$ P треуг-ка APB, а второй—его внешнего угла. Мы знаем (n° **62** упражнение 4), что они перпендикулярны между собою, т.-е. $\angle$ MPN $=$ d. Следовательно, искомая точка P обладает свойством, что из нее отрезок MN виден под прямым углом, а такие точки, как знаем, расположены на круге, диаметр которого есть отрезок MN (nn° **134** и **135**).

Отсюда заключаем:

Геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно данному числу, служит круг, построить который мы умеем: надо отрезок, соединяющий две данных точки, разделить внутренним и внешним образом в отношении, равном данному числу, и полученные две точки принять за концы диаметра искомого круга.

220. Возьмем внутри круга какую-либо точку O (чер. 215) и построим чрез нее две произвольных хорды AB и CD. Соединив затем точку A с D и B с C (можно A с C и B с D), получим

$\triangle AOD \sim \triangle OBC$, так как углы при точке O равны, как вертикальные, $\angle A = \angle C$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу BD, что достаточно для подобия треугольников. Поэтому имеем:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA}.$$

Если мы теперь под обозначениями входящих сюда отрезков будем понимать числа, полученные от их измерения какою-либо единицею, то можем сюда применить свойство пропорции, взятое из курса арифметики (или алгебры): произведение крайних членов равно произведению средних; следовательно,

$$OA \, . \, OB = OC \, . \, OD,$$

т.-е., **если две хорды пересекаются внутри круга, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.**

Так как хорды проведены чрез O произвольные, то произведение отрезков и третьей хорды должно быть такое же, следовательно:

произведение отрезков хорд, проходящих через точку, данную внутри круга, постоянно.

Впрочем, равенство

$$OA \, . \, OB = OC \, . \, OD$$

имеет и геометрический смысл: произведение $OA \, . \, OB$ выражает площадь прямоугольника, стороны которого суть отрезки OA и OB, в соответствующих квадратных единицах; такой же смысл имеет и произведение $OC \, . \, OD$. Поэтому имеем:

Прямоугольники, сторонами каждого из которых служат отрезки хорды, проходящей через постоянную точку внутри круга, равновелики.

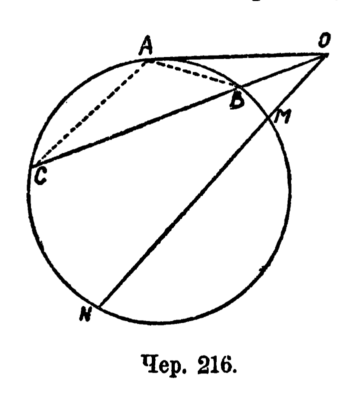
221. Возьмем теперь точку O вне круга и построим чрез нее касательную OA к кругу и несколько секущих OC, ON... (чер. 216). Соединив точку касания A касательной с точками B и C, где секущая OC пересекает круг, получим $\triangle OAC \sim \triangle OAB$, так как у них $\angle O$ общий и $\angle C = \angle OAB$, потому что угол, составленный хордою и касательною, равен вписанному углу,

опирающему на дугу, заключенную внутри того же угла (n° **133**).

Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OB}$$

(стороны OC и OA лежат против углов OAC и OBA, стороны OA и OB — против углов ACO и OAB).



Чер. 216.

Эта пропорция читается:

Если из точки вне круга построить к нему касательную и секущую, то касательная является средним пропорциональным отрезком между всею секущею и ее внешнею частью.

Можно также применить сюда свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних, получим

$$OC \cdot OB = OA^2.$$

Если рассмотрим другую секущую OMN, то и для нее справедливо то же соотношение:

$$ON \cdot OM = OA^2,$$

т.-е., если через точку вне круга проводить секущие, то произведение всей секущей на ее внешний отрезок постоянно и равно квадрату касательной, проведенной к кругу через ту же точку.

Здесь выражение „квадрат касательной“ надо понимать в смысле „квадрат числа, полученного от измерения касательной линейною единицею“.

Можно то же свойство выразить геометрически:

Прямоугольники, сторонами каждого из которых служат секущая, проведенная к кругу через определенную внешнюю точку, и ее внешний отрезок, равновелики между собою и равновелики

квадрату, стороною которого служит касательная, проведенная к кругу через ту же точку.

222. Свойства двух предыдущих nn° можно выразить одинаково:

Если в плоскости круга возьмем какую-либо точку и чрез нее построим ряд прямых, то произведение отрезков каждой прямой от этой точки до точек пересечения этой прямой с кругом есть число постоянное (каждый отрезок выражен числом), зависящее только от круга и от положения точки, но не зависящее от того, какую прямую проводим через эту точку.

Указанное произведение как бы характеризует положение точки относительно круга и называется степенью этой точки относительно круга.

Мы впоследствии еще вернемся к этому понятию.

223. Упражнения. 1. Периметр треугольника равен 45 дм., биссектор меньшего из его углов делит противоположную сторону на отрезки, равные 4 и 6 дм. Вычислить каждую из его сторон.

2. Две хорды круга пересекаются внутри его так, что меньшие их отрезки равны 6 и 9 дм. Вычислить длину каждой хорды, если отношение этих хорд $=\frac{3}{4}$.

3. Параллельные стороны трапеции равны соответ. 12 и 28 лин. един.; если продолжить непараллельные стороны до их пересечения, то одна из них увеличится от этого продолжения на 9, а другая на 6 лин. един. Вычислить не параллельные стороны трапеции.

4. В трапеции построены диагонали: одна из них $=21$ дм., а другая в точке пересечения разделилась на отрезки, равные 8 и 20 дм. Вычислить: 1) на какие отрезки разделилась другая диагональ и 2) параллельные стороны этой трапеции, если ее средняя линия $=21$ дм.

5. К кругу из внешней точки проведены секущая, внутренний отрезок которой $=36$ дм., и касательная, которая в 2 раза больше внешнего отрезка секущей. Вычислить секущую и касательную.

6. Показать, что отношение двух высот треугольника равно обратному отношению соответств. оснований (можно двумя способами: 1) при помощи подобия треугольников и 2) пользуясь уменьем измерять площадь треугольника).

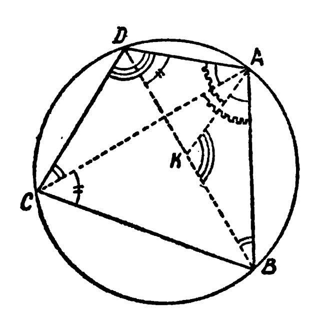
7. Построение четвертого пропорционального отрезка к трем данным можно выполнять без построения параллельных, а помощью круга, на основании n° 220 или n° 221. Выполнить несколько таких построений.

8. Обратно: если построены две пересекающихся прямых и от точки их пересечения отложены на каждой прямой в одном или в обратных направлениях по 2 отрезка таких, что произведение отрезков на одной прямой равно произведению отрезков другой, то 4 конца этих отрезков расположены на одном круге.

9. Построить прямоугольник, имеющий одну данную сторону и равновеликий сумме двух данных треугольников, имеющих общее основание.

10. Построить треугольник по стороне, по высоте, опущенной на эту сторону, и по другой высоте.

224. Теорема Птоломея. Пусть в круг вписан какой-либо четыреугольник $ABCD$ (чер. 217); построим его диагонали AC и BD и построим еще прямую AK (точка K есть точка пересечения этой прямой с диагональю) так, чтобы $\angle BAK = \angle DAC$.



Чер. 217.

Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle ADC$. У них по построению $\angle BAK = \angle DAC$ и затем $\angle ABK = \angle ACD$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу AD. Следоват., $\triangle ABK \backsim \triangle ADC$. Отсюда имеем:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{DC}$$

Применяя сюда свойство: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних, имеем:

$$AC.BK = AB.DC. \tag{1}$$

Рассмотрим затем $\triangle AKD$ и $\triangle ABC$. У них $\angle DAK = \angle BAC$ (каждый из этих углов является суммою одинаковых слагаемых: общее слагаемое есть $\angle KAC$ и равные слагаемые $\angle DAC = \angle BAK$), затем $\angle ADK = \angle ACB$, как вписанные опирающиеся на одну дугу AB. Следовательно, $\triangle AKD \backsim \triangle ABC$ Поэтому имеем:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DK}{BC},$$

откуда получаем:

$$AC.DK = AD.BC. \tag{2}$$

Сложив равенства (1) и (2) по частям (мы ведь рассматриваем здесь обозначения AB, AC и т. д., как числа), получим:

$$AC.BK+AC.DK=AB.DC+AD.BC.$$

Вынесем в первой части число AC за скобку

$$AC(BK+DK)=AB.DC+AD.BC$$

и, замечая, что $BK+DK=BD$, получим:

$$AC.BD=AB.DC+AD.BC.$$

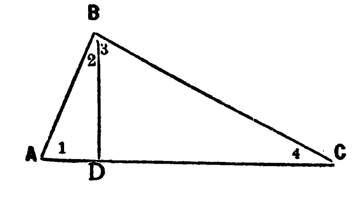
Это свойство читаем (сокращенно) словами:

Произведение диагоналей вписанного в круг четыреугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

Можно дать и геометрическое толкование этому:

Прямоугольник, сторонами которого служат диагонали вписываемого четыреугольника, равновелик сумме двух прямоугольников, сторонами каждого из которых служат две противоположных стороны четыреугольника.

225. Пусть построен прямоугольный треугольник ABC (чер. 218), $\angle B=d$. Построим еще $BD\perp AC$ — опустим перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу — пронумеруем полученные углы: $\angle A=\angle 1$, $\angle ABD=\angle 2$, $\angle DBC=\angle 3$, $\angle C=\angle 4$.



Чер. 218.

Тогда имеем: $\angle 1+\angle 2=d$ (так как сумма острых углов прямоугольного треугольника ABD — угол при D прямой — равна прямому углу), с другой стороны $\angle 2+\angle 3=d$ (так как $\angle B$ прямой), отсюда заключаем, что $\angle 1=\angle 3$; также найдем, что $\angle 2=\angle 4$.

Рассмотрим теперь $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$; они, в силу найденных равенств углов, подобны ✕; следовательно,

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}$$

(AD лежит против $\angle 2$ в $\triangle ABD$, ему в $\triangle BDC=\angle 4$, против которого лежит сторона BD; члены второго отношения BD и DC суть стороны, расположенные против равных углов: BD в $\triangle ABD$ против $\angle 1$ и DC в $\triangle BDC$ против $\angle 3$).

Эту пропорцию, имея в виду, что у нее средние члены одинаковы, читаем: „перпендикуляр BD есть средний пропорциональный отрезок между отрезками AD и DC гипотенузы“.

Рассмотрим затем $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$; они подобны, потому что у них $\angle A$ общий и $\angle B$ ($\angle ABC$) $=\angle D$ ($\angle ADB$), как прямые углы. Отсюда имеем:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$$

(AC и AB против прямых углов, AB и AD против равных углов $\angle 2$ и $\angle 4$).

Эту пропорцию прочтем: „Катет AB есть средний пропорциональный отрезок между всею гипотенузою AC и ее отрезком AD“.

Также найдем, что $\triangle ABC \backsim \triangle DBC$ и отсюда:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$$

Эта пропорция выражает свойство катета BC, такое же, какое только что было найдено для AB.

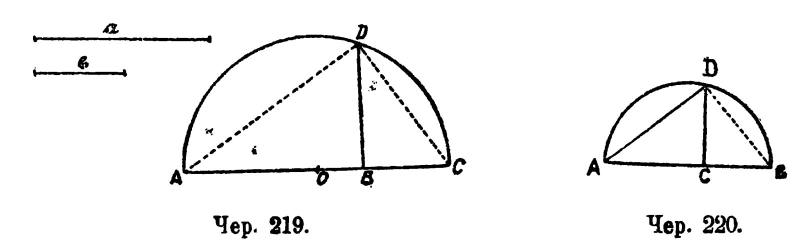
Соединяя все вместе, получим:

Если из вершины прямого угла прямоугольного треугольника опустить перпендикуляр на гипотенузу, то этот перпендикуляр есть средний пропорциональный между отрезками гипотенузы, а каждый из катетов есть средний пропорциональный между всею гипотенузою и ее отрезком, прилежащим к этому катету.

226. Предыдущим свойством, а также n° 216, пользуются для построения отрезка среднего пропорционального между двумя данными.

Пусть даны отрезки a и b (чер. 219); требуется построить такой отрезок x, чтобы имела место пропорция $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

Для этого откладываем отрезок $AB=a$ и прилагаем к нему отрезок $BC=b$. Примем полученную сумму двух отрезков, отрезок AC, за диаметр и построим на нем круг (достаточно половину круга; его центр O расположен в середине отрезка AC). Затем через точку B строим $BD\perp AC$ — точка D есть точка



Чер. 219. Чер. 220.

пересечения этого перпендикуляра с кругом. Тогда BD и есть искомый отрезок. В самом деле, соединив D с A и с C, получим прямоугольный треугольник ADC ($\angle ADC$ прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр AC круга) и, следовательно, согласно предыдущему n°, имеем $AB:BD=BD:BC$ или $a:BD=$ $=BD:b$, откуда и заключаем, что $x=BD$.

Можно видоизменить это построение: сделать так, чтобы отрезок a был всею гипотенузою, а отрезок b — ее отрезком до перпендикуляра, опущенного на нее из вершины прямого угла. Строим $AB=a$ (чер. 220) и на нем $AC=b$. Принимая AB за диаметр, строим круг и из точки C строим $CD\perp AB$. Тогда отрезок AD, служащий катетом прямоугольного треугольника ADB, есть средний пропорциональный между AB и AC, т.-е. между a и b.

Также можно воспользоваться n° 207 для этого построения.

227. Предыдущее построение необходимо для решения многих задач. Вот некоторые из них:

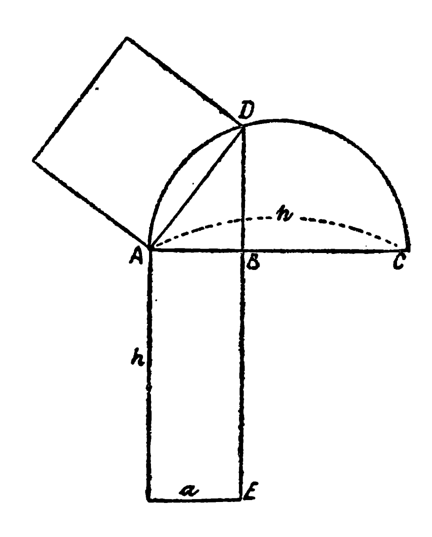
1. П о с т р о и т ь к в а д р а т, р а в н о в е л и к и й д а н н о м у п а р а л л е л о г р а м м у.

Называя сторону искомого квадрата через x, а основание и высоту данного параллелограмма чрез a и h, имеем:

$$x^2 = ah, \text{ откуда } \frac{a}{x} = \frac{x}{h},$$

т.-е. искомая сторона есть средний пропорциональный отрезок между основанием и высотой данного параллелограмма.

Если дан прямоугольник, то построение можно выполнить, как указано на чер. 221: продолжим сторону AB так, чтобы



Чер. 221.

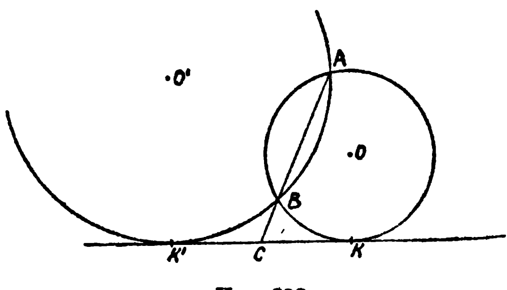
$AC = h$ и принимая AC за диаметр, построим круг; продолжив сторону BE прямоугольника, получим точку D, соединив ее с A, получим сторону искомого квадрата, а затем и сам квадрат.

2. **Построить круг, проходящий через две данных точки и касательный к данной прямой.**

Пусть даны точки A и B и прямая KK' (чер. 222). Требуется построить круг, проходящий через A и B и касающийся прямой KK'. Точки A и B должны быть даны с одной стороны KK', — иначе задача невозможна.

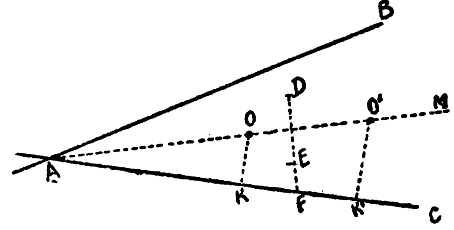
Легко найти точку касания искомого круга: соединим точки A и B и продолжим прямую AB до пересечения в точке C с KK'. Тогда точка касания K определяется из пропорции (n° 221)

$$\frac{CA}{CK} = \frac{CK}{CB}.$$



Чер. 222.

Отрезки CA и CB нам известны, мы можем на основании n° 226 построить средний пропорциональный к ним; отложив этот отрезок по прямой KK' от C, получим две точки K и K', каждая из которых дает по одному решению, — всего задача имеет 2 решения.



Чер. 223.

Центры искомых кругов O и O' найдутся, как точки пересечения перпендикуляра к AB через его середину и перпендикуляра к KK' из точки K (для O) или из точки K' (для O').

3. **Построить круг, касающийся двух данных пересекающихся прямых и проходящий через данную точку.**

Пусть даны прямые AB и AC, к которым должен касаться круг и точка D, через которую он должен проходить (чер. 223).

Задача приводится к предыдущей. Центр искомого круга лежит на биссекторе того угла, образуемого нашими прямыми, внутри которого лежит точка D. Построим точку E, симметричную с D относительно биссектора AM; тогда круг должен пройти и через точку E. Задача свелась к предыдущей. Мы должны отложить $FK = FK'$, где FK есть средний пропорциональный отрезок между FD и FE. Центры двух кругов, удовлетворяющих требованиям, суть точки пересечения биссектора AM с перпендикулярами KO и $K'O'$ к стороне AC.

ГЛАВА XXIII.

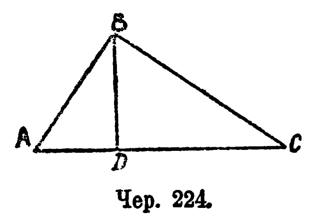
Числовые соотношения в треугольнике.

228. В этой главе мы будем главным образом понимать под обозначениями отрезков AB, AC и т. д. выражающие их числа.

Мы знаем (n° 226), что если даны геометрически два отрезка a и b, то мы можем построить средний пропорциональный между ними. Пусть теперь отрезки даны не геометрически, а числами, т.-е. под a и b будем понимать числа, выражающие 2 данных отрезка. Тогда нахождение среднего пропорционального отрезка сведется к нахождению числа x из пропорции $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, где a, b и x числа. Из этой пропорции имеем:

$$x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}.$$

229. Пусть имеем прямоугольный треугольник ABC (чер. 224). Опустим из вершины его прямого угла ($\angle B$ прямой) перпендикуляр BD на гипотенузу AC. Тогда из n° 225 мы знаем:



Чер. 224.

$$1) \ \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD} \text{ и } 2) \ \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}.$$

Отсюда мы получаем:

$$AB^2 = AC \cdot AD \text{ и } BC^2 = AC \cdot DC.$$

Сложив по частям полученные равенства, получим:

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC(AD + DC).$$

(Здесь мы вынесли число AC за скобку). Замечая, что $AD+DC=AC$, получим:

$$AB^2+BC^2=AC^2 \text{ или } AC^2=AB^2+BC^2,$$

т.-е. квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты прямоугольного треугольника.

Сокращенно говорят: Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

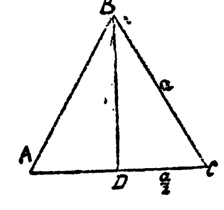
Если мы дадим полученной формуле геометрическое толкование, то получим уже известную нам теорему Пифагора (n°161): квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Из ур-ния $AB^2+BC^2=AC^2$ иногда приходится находить катет прямоугольного треугольника, по гипотенузе и другому катету. Получим, напр.:

$$AB^2=AC^2-BC^2 \text{ и, следов., } AB=\sqrt{AC^2-BC^2}.$$

230. Найденное числовое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника позволяет решать множество вычислительных задач. Решим некоторые из них:

1. Вычислить площадь равностороннего треугольника по данной его стороне.



Чер. 225.

Пусть $\triangle ABC$ (чер. 225) равносторонний и каждая его сторона выражается числом a ($AB=BC=AC=a$). Для вычисления площади этого треугольника надо узнать сначала его высоту BD, которую мы назовем чрез h. Мы знаем, что в равностороннем треугольнике высота BD делит основание AC пополам, т.-е. $AD=DC=\frac{a}{2}$. Поэтому из прямоугольного треугольника DBC имеем:

$$BD^2=BC^2-DC^2,$$

или

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4} \text{ (выполняем вычитание).}$$

Отсюда имеем:

$$h=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$ (выносим множит. из-под корня).

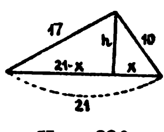
Следовательно, называя число, выражающее площадь нашего треугольника, чрез Q и зная, что площ. $\triangle ABC=\frac{AC \, . \, BD}{2}$, находим:

$$Q=\frac{a \, . \, a\sqrt{3}}{2 \, . \, 2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Мы можем смотреть на эту формулу, как на один из способов измерения площади равностороннего треугольника: надо измерить его сторону в линейных единицах, возвести найденное число в квадрат, умножить полученное число на $\sqrt{3}$ и разделить на 4 — получим выражение площади в квадратных (соответствующих) единицах.

2. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21 лин. един. Вычислить его площадь.

Опустим высоту h в нашем треугольнике (чер. 226) на большую сторону — она непременно пройдет внутри треугольника, так как в треугольнике тупой угол может быть расположен только против большей стороны. Тогда большая сторона, $=21$, разделится на 2 отрезка, один из которых обозначим чрез x (см. чертеж) — тогда другой $=21-x$. Получим два прямоугольных треугольника, из которых имеем:



Чер. 226.

$$h^2=10^2-x^2 \text{ и } h^2=17^2-(21-x)^2.$$

Так как левые части этих уравнений одинаковы, то

$$10^2-x^2=17^2-(21-x)^2.$$

Выполняя действия, получим:

$$100-x^2=289-441+42x-x^2.$$

Упрощая это уравнение, найдем:

$$42x=252,$$

откуда

$$x=6.$$

Тогда из уравнения $h^2 = 10^2 - x^2$, получим:

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

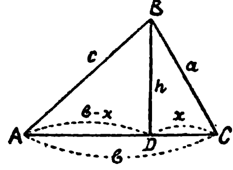
и, следовательно,

$$h = \sqrt{64} = 8.$$

Тогда искомая площадь найдется:

$$Q = \frac{21 \cdot 8}{2} \text{ квад. един.} = 84 \text{ квад. един.}$$

3. Можно решить общую задачу: как вычислить площадь треугольника по его сторонам?



Чер. 227.

Пусть стороны треугольника ABC выражены числами BC = a, AC = b и AB = c (чер. 227). Положим, что AC есть большая сторона; тогда высота BD пойдет внутри △ABC. Назовем: BD = h, DC = x и тогда AD = b − x.

Из △BDC имеем: $h^2 = a^2 - x^2$.

Из △ABD имеем: $h^2 = c^2 - (b - x)^2$, откуда $a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$.

Решая это уравнение, последовательно получаем:

$$2bx = a^2 + b^2 - c^2 \text{ и } x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Далее, подставляя это выражение в уравнение $h^2 = a^2 - x^2$, найдем

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4b^2},$$

(Последнее написано на том основании, что числителя $4a^2b^2 - (a^2 + b_2 - c^2)^2$ можно рассматривать, как разность квадратов, которую разлагаем на произведение суммы на разность).

Или

$$h^2 = \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4b^2} = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4b^2}$$

И, следовательно, $h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}}{2b}$.

Эту формулу преобразовывают, вводя периметр треугольника, который обозначим чрез 2p, т.-е.

$$a + b + c = 2p.$$

Вычитая по 2c из обеих частей равенства, получим:

$$a + b + c - 2c = 2p - 2c \text{ или } a + b - c = 2(p - c):$$

Также найдем:

$$c+a-b=2(p-b) \quad \text{и} \quad c-a+b=2(p-a).$$

Тогда получим:

$$h=\frac{\sqrt{2.2.2.2.p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2b}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}.$$

И для площади Q получим:

$$Q=\frac{b.h}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(p выражает полупериметр треугольника).

Этою формулою можно пользоваться для вычисления площади треугольника по трем его сторонам.

231. Упражнения. 1. Основание равнобедренного треугольника равно 10 дм., а его площадь $=60$ кв. дм. Найти (вычислить) его периметр.

2. Параллельные стороны равнобочной трапеции равны 16 и 40 дм., а каждая из непараллельных сторон $=37$ дм. Вычислить ее площадь.

3. Стороны трапеции равны: параллельные 15 и 36 дм., а непараллельные 13 и 20 дм. Вычислить ее площадь.

4. Сторона ромба и его меньшая диагональ одинаковы. Найти формулу для измерения площади такого ромба по его стороне.

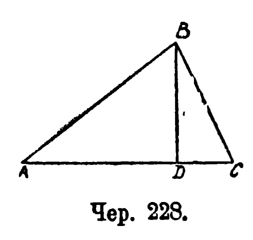
5. Катеты прямоугольного треугольника равны соответственно 6 и 8 дм. Найти отрезок гипотенузы, заключенный между биссектором прямого угла треугольника и высотою, опущенною из вершины прямого угла.

6. Биссектор прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на 2 отрезка, равные соответственно $7\frac{11}{17}$ и $18\frac{6}{17}$ лин. един. Вычислить его площадь.

7. Найти сторону квадрата, равновеликого равнобедренному треугольнику, боковая сторона которого $=12\frac{1}{2}$ лин. един., а высота относится к основанию, как $2:3$.

8. Стороны параллелограмма равны a и b и один из его углов $=45°$. Найти формулу для его площади.

9. Угол параллелограмма $=30°$; выразить его площадь чрез его стороны (a и b).



Чер. 228.

232. В n°229 мы нашли зависимость между сторонами прямоугольного треугольника. Можно найти подобную же зависимость для сторон (с присоединением еще одного отрезка) косоугольного треугольника.

Пусть имеем сначала $\triangle ABC$ (чер. 228) такой, чтобы $\angle A$ был острый. Постараемся найти выражение для квадрата сто-

роны BC, лежащей против этого острого угла (подобно тому, как в n° 229 нашли выражение для квадрата гипотенузы).

Построив $BD \perp AC$, получим из прямоугольного треугольника BDC:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Заменим BD^2, определяя его из $\triangle ABD$, откуда имеем:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2,$$

а отрезок DC заменим чрез $AC - AD$ (очевидно, что $DC = AC - AD$). Тогда получим:

$$BC^2 = AB^2 - AD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 - \\ - 2AC \,.\, AD + AD^2.$$

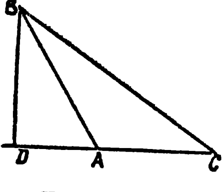
Выполнив приведение подобных членов, найдем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \,.\, AD.$$

Эта формула читается: квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух его других сторон, минус удвоенное произведение одной из этих сторон на ее отрезок от вершины острого угла до высоты.

233. Пусть теперь $\angle A$ в $\triangle ABC$ (чер. 229) тупой. Найдем выражение для квадрата стороны BC, лежащей против тупого угла.

Построив высоту BD — она теперь расположится несколько иначе: на 228 где $\angle A$ острый, точки D и C располагаются по одну сторону от A, а здесь, где $\angle A$ тупой, точки D и C расположатся по разные стороны от A. Тогда из прямоугольного $\triangle BDC$ получим:



Чер. 229.

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Мы можем BD^2 заменить, определяя его из прямоугольного $\triangle BDA$:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2,$$

а отрезок $DC = AC + AD$, что очевидно. Замемяя, получим:

$$BC^2 = AB^2 - AD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 + \\ + 2AC \,.\, AD + AD^2.$$

Выполнив приведение подобных членов, найдем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \, . \, AD,$$

т.-е. квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух его других сторон, плюс удвоенное произведение одной из них на ее отрезок от вершины тупого угла до высоты.

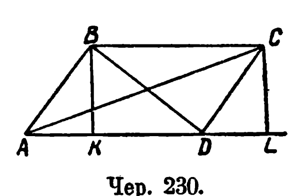
Эта формула, а равно и формула n°232, допускают геометрическое истолкование, которое легко найти.

234. Пользуясь свойствами nn° 229, 232, 233, мы можем, если нам даны стороны треугольника в числах, узнать, есть ли у этого треугольника прямой или тупой угол.

Прямой или тупой угол в треугольнике может быть расположен лишь против большей стороны, каков же угол против нее, легко узнать: этот угол острый, прямой или тупой, смотря по тому, будет ли квадрат большей стороны меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.

Узнать, имеется ли прямой или тупой угол в следующих треугольниках, определяемых своими сторонами:

1) 15 дм., 13 дм. и 14 дм.; 2) 20 29 и 21; 3) 11, 8 и 13; 4) 7, 11 и 15



Чер. 230.

235. Пусть имеем параллелограмм $ABCD$ (чер. 230); построим его диагонали AC и BD и его высоты $BK \perp AD$ и $CL \perp AD$.

Тогда, если $\angle A$ ($\angle BAD$) острый, то $\angle D$ ($\angle ADC$) непременно тупой (ибо их сумма $= 2d$). Из $\triangle ABD$, где $\angle A$ считаем острым, имеем:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \, . \, AK,$$

а из $\triangle ACD$, где $\angle D$ тупой, имеем:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \, . \, DL.$$

Заменим в последней формуле отрезок AD равным ему отрезком BC и DL равным ему AK ($DL = AK$, ибо $\triangle ABK = \triangle DCL$, в чем легко убедиться). Тогда получим:

$$AC^2 = BC^2 + CD^2 + 2AD \, . \, AK.$$

Сложив выражение для BD^2 с последним выражением для AC^2, найдем:

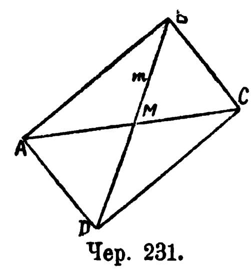
$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2,$$

так как члены $-2AD \,.\, AK$ и $+2AD \,.\, AK$ взаимно уничтожаются. Полученное равенство можем прочитать:

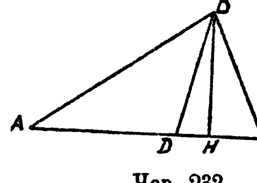
Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

236. Вычисление медианы и биссектора треугольника по его сторонам. Пусть в треугольнике ABC (чер. 231) построена медиана BM (т.-е. $AM = MC$). Зная стороны $\triangle ABC$: $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, вычислить медиану BM.

Продолжим BM и отложим отрезок $MD = BM$. Соединив D с A и D с C, получим параллелограмм ABCD (выяснить это легко, так как $\triangle AMD = \triangle BMC$ и $\triangle AMB = \triangle DMC$).



Чер. 231.



Чер. 232.

Называя медиану BM чрез m, получим $BD = 2m$ и тогда, пользуясь предыдущим n°, имеем:

$$(2m)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2,$$

откуда узнаем m (т.-е. медиану, делящую пополам сторону b).

Пусть теперь надо вычислить биссектор BD внутреннего угла $\triangle ABC$. (чер. 232) по его сторонам: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из $\triangle ABD$ имеем ($BH \perp AC$):

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2AD \,.\, DH.$$

Из $\triangle DBC$ также получим:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2DC \,.\, DH.$$

Умножим обе части первого уравнения на DC, а обе части второго на AD, и сложим по частям; получим:

$$AB^2 \,.\, DC + BC^2 \;\; AD = BD^2 \,.\, AC + AD \;\; DC \;\; AC \qquad . (1)$$

[Член $BD^2 \,.\, AC$ получился из $BD^2 \;\; DC + BD^2 \,.\, AD = BD^2 \, (DC + AD) = BD^2 \,.\, AC$; член $AD \,.\, DC \,.\, AC$ получился из $AD^2 \;\; DC + DC^2 \;\; AD = AD \;\; DC \, (AD + DC) = AD \;\; DC \;\; AC$].

Это равенство, называемое **теоремою Стьюарта**, справедливо для всякой прямой BD, идущей из вершины B треугольника к какой-либо точке основания. Теперь примем во внимание, что BD есть биссектор $\angle B$. Тогда $\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a}$ и $AD+DC=b$. Отсюда получаэм $AD=\frac{cb}{c+a}$ и $DC=\frac{ba}{c+a}$.

Подставив в равенство (1) и называя BD чрез w, имеем:

$$\frac{c^2 \cdot ba}{c+a}+\frac{a^2cb}{c+a}=w^2b+\frac{b^3ac}{(a+c)^2},$$

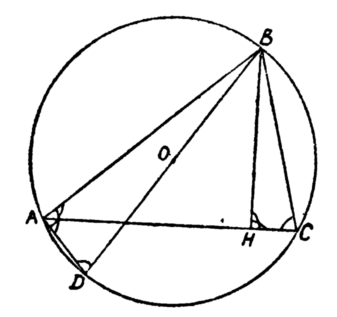
откуда после сокращений получаем:

$$w^2+\frac{b^2ac}{(a+c)^2}=\frac{ac(c+a)}{c+a}=ac.$$

и

$$w^2=ac\left[1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right]=ac\,\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+c)^2}.$$

237. **Вычисление радиуса, описанного около треугольника круга.** Пусть около $\triangle ABC$ (чер. 233) описан круг O Построим диаметр круга BD, хорду AD и высоту треугольника BH.



Чер. 233.

Тогда $\triangle ABD \sim \triangle BCH$ ($\angle A = \angle H = d$ — угол A прямой, потому что он вписанный, опирающийся на диаметр BD и $\angle D = \angle C$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу AB). Поэтому имеем:

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{BH},$$

или, называя радиус OB чрез R, высоту BH чрез h и стороны AB и BC, как и раньше, соответственно чрез c и a:

$$\frac{2R}{a}=\frac{c}{h},$$

откуда

$$R=\frac{ac}{2h},$$

но площадь $\triangle ABC = Q = \frac{bh}{2}$, откуда $h=\frac{2Q}{b}$.

Следовательно,

$$R=\frac{abc}{4Q}.$$

Мы умеем (n°230 зад. 3) вычислять площадь треугольника Q по его сторонам. Отсюда можем вычислить R по трем сторонам треугольника.

238. Вычисление радиуса вписанного в треугольник круга. Впишем в $\triangle$ ABC, стороны которого даны (чер. 234), круг O. Соединив его центр O с вершинами треугольника и с точками касания D, E и F сторон к кругу, найдем, что радиусы круга OD, OE и OF служат высотами треугольников BOC, COA и AOB.

Называя радиус вписанного круга чрез r, имеем:

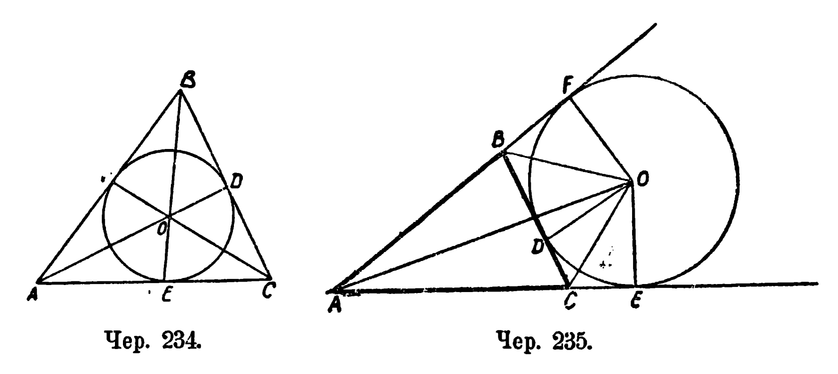
$$\text{площ. } \triangle ABC = Q = \text{площ. } \triangle BOC + \text{площ. } \triangle COA + \text{площ. } \triangle AOB.$$

Или
$$Q = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$

откуда
$$Q = \frac{a + b + c}{2} r = p \cdot r,$$

где мы обозначаем, как в n°230, периметр треугольника чрез 2p.

Отсюда
$$\frac{Q}{p}.$$



Чер. 234. Чер. 235.

Пусть r_a есть радиус вне-вписанного круга (чер. 235). Соединив его центр O с вершинами A, B и C и с точками касания D, E и F, найдем:

$$\text{площ. } \triangle ABC = \text{площ. } \triangle AOC + \text{площ. } \triangle AOB - \text{площ. } \triangle BCO.$$

Или
$$Q = \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{2}$$

откуда
$$Q = \frac{b + c - a}{2} r_a.$$

Но в n°230 (зад. 3) мы нашли, что $b + c - a = 2(p - a)$. Поэтому из предыдущего легко получим:

$$r_a = \frac{Q}{p - a}.$$

Также найдем:

$$r_b = \frac{Q}{p - b} \text{ и } r_c = \frac{Q}{p - c}.$$

239. Упражнения. 1. Показать справедливость формулы:

$$Q=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a}\right)}},$$

где Q площадь треугольника, h_a, h_b и h_c его высоты.

2. Площадь треугольника выразить через радиусы вписанного и невписанных кругов (чрез r, r_a, r_b и r_c). Отв. $Q=\sqrt{r\,.\,r_a\,.\,r_b\,.\,r_c}$

3. Высота равнобочной трапеции $=h$, а каждая из ее диагоналей делится в точке пересечения на 2 отрезка, равные a и b. Выразить площадь этой трапеции чрез a, b и h. Отв. $h\sqrt{(a+b+h)(a+b-h)}$.

4. Стороны прямоугольника равны a и b; на большей из них (пусть $a>b$) построен равносторонний треугольник, площадь которого частью налегает на площадь прямоугольника. Выразить через a и b ту часть площади треугольника, которая не наложена на площадь прямоугольника.

Отв. $\frac{(a\sqrt{3}-2b)^2\sqrt{3}}{12}$.

5. В прямоугольный треугольник вписан круг. Гипотенуза в точке касания разделилась на отрезки a и b. Выразить площадь этого треугольника чрез a и b. Отв. ab.

6. Биссектор прямого угла прямоугольного треугольника делит его гипотенузу на 2 отрезка, равные a и b. Найти его площадь.

Отв. $\frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}$.

7. Сторона квадрата $=a$. На двух его противоположных сторонах построены внутри квадрата равносторонние треугольники. Вычислить площадь четыреугольника, полученного от пересечения сторон построенных треугольников. Отв. $\frac{a^2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

ГЛАВА XXIV.

Числовые соотношения и пропорциональность в правильных многоугольниках.

240. В n°148 мы узнали, как разделить окружность на 4 равных части: для этого надо в круге O построить 2 перпендикулярных диаметра. Соединив точки деления, получим правильный вписанный в круг 4-угольник $ABCD$ (чер. 236).

Теперь мы можем выразить сторону этого 4-угольника чрез радиус круга.

Из $\triangle AOB$, в котором $\angle O$ прямой, имеем:

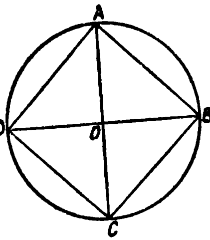
$$AB^2 = AO^2 + OB^2.$$

Назовем сторону AB чрез a_4 (чтобы показать, что это—сто-сторона 4-угольника) и радиус круга чрез R.

Тогда

$$a_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

откуда $a_4 = \sqrt{2R^2} + R\sqrt{2}.$



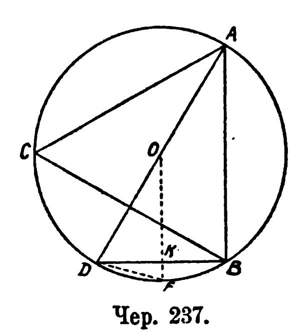
Чер. 236.

241. В том же n°148 мы узнали, что хорда, стягивающая дугу, равную 6-й части окружности, равна радиусу; другими словами: сторона правильного вписанного в круг шестиугольника равна радиусу, т.-е.

$$a_6 = R,$$

где a_6 обозначает сторону правильного вписанного шестиугольника.

242. Разделив окружность на 6 равных частей и соединив точки деления чрез одну, получим правильный треугольник, вписанный в круг, — обозначим его сторону чрез a_3. Пусть ABC (чер. 237) есть правильный треугольник, вписанный в круг O. Выразим его сторону чрез радиус R круга.



Чер. 237.

Мы предварительно делили окружность на 6 равных частей, и одна из этих точек деления, точка D, лежит на $\smile CB$. Легко сообразить, что $\smile ACD = \smile ABD$, так как каждая состоит из 3 шестых частей окружности. Поэтому точка D лежит на одном диаметре с точкою A. Построив этот диаметр AD и хорду DB, получим $\triangle ABD$, у которого угол при B прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр. Следовательно,

$$AB^2 = AD^2 - DB^2$$

или, зная, что $AB = a_3$, $AD = 2R$ и $DB = R$ (ибо $a_6 = R$), получим $a_3{}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$,

откуда $$a_3 = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}.$$

243. Мы можем также, пользуясь n°240, найти a_8 (т.-е. сторону правильного вписанного восьмиугольника), a_{16} и т. д., а пользуясь n°241, найти a_{12}, затем a_{24} и т. д. Найдем, напр., выражение a_{12} чрез R. Для этого чрез O (чер. 237) построим $OE \perp DB$ и затем хорду DE; тогда $DE = a_{12}$. Сторона правильн. шестиугольника DB разделится прямою OE в точке K пополам; $DB = R$, следовательно. $DK = \frac{R}{2}$. Из $\triangle\, ODK$ имеем:

$$OK^2 = OD^2 - DK^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \text{ и } OK = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

далее имеем

$$KE = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{3})}{2} \text{ и из } \triangle\, DKE:$$

$$DE^2 = DK^2 + KE^2,$$

или

$$a^2_{12} = \frac{R^2}{4} + \frac{R^2(2-\sqrt{3})^2}{4} = \frac{R^2[1+(2-\sqrt{3})^2]}{4} = \frac{R^2(8-4\sqrt{3})}{4} =$$

$$= R^2(2-\sqrt{3}).$$

Отсюда

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

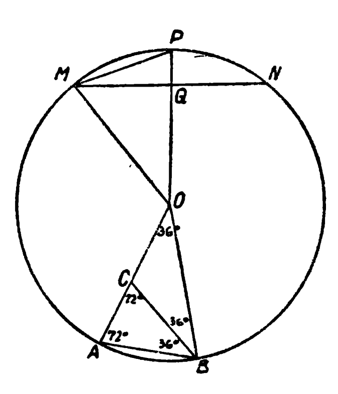
244. Мы можем еще научиться делить окружность на 5, на 10, на 20 и т. д. равных частей и вместе с тем научиться строить правильные многоугольники об 5, об 10, об 20 и т. д. сторонах, а также найти выражения сторон этих многоугольников чрез радиус круга. Удобнее начать с правильного десятиугольника.

Чтобы исследовать эту задачу, допустим, что $\smile AB$ (чер. 238) есть десятая часть окружности и хорда $AB = a_{10}$. Тогда $\smile AB = 36°$ и, следовательно, $\angle AOB = 36°$; $\triangle\, AOB$ равнобедренный

($OA = OB$, как радиусы). Так как угол при его вершине $= 36°$, то на долю углов при основании остается $180° - 36° = 144°$, но эти углы равны, следовательно, $\angle A = \angle B = 72°$.

Построим биссектор BC угла B; тогда $\angle ABC = 36°$ и $\angle CBO = 36°$. Далее видим, что $\angle ACB$ (внешний для $\triangle OCB$) $=$ $= \angle O + \angle CBO = 36° + 36° = 72°$.

Отсюда заключаем: 1) $\triangle ABC$ равнобедренный (углы при A и C равны), — следовательно, $AB = CB$, 2) $\triangle OCB$ равнобедренный (углы при O и B равны), — следовательно, $CB = OC$ или $OC = AB$.



Чер. 238.

Так как далее биссектор внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум его другим сторонам (n°215), то

$$\frac{AC}{CO} = \frac{AB}{BO}$$

Но $AB = CO$ и $OB = OA$, следовательно,

$$\frac{AC}{CO} = \frac{CO}{OA} \qquad (1)$$

Отсюда видим, что для получения отрезка OC, равного стороне AB правильного десятиугольника, надо радиус круга OA разделить на такие два отрезка AC и CO, чтобы один из них был средним пропорциональным между всем радиусом OA и другим отрезком AC.

Такое деление отрезка называется иногда **золотым делением**, но обычно называют его **делением отрезка в крайнем и среднем отношении**. Как выполнять такое деление, будет указано в следующем n°, а здесь мы найдем выражение стороны правильного вписанного десятиугольника (a_{10}) чрез радиус круга.

Из (1) имеем ($OA = R$, $CO = a_{10}$, следовательно, $AC = R - a_{10}$):

$$\frac{R - a_{10}}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{R}.$$

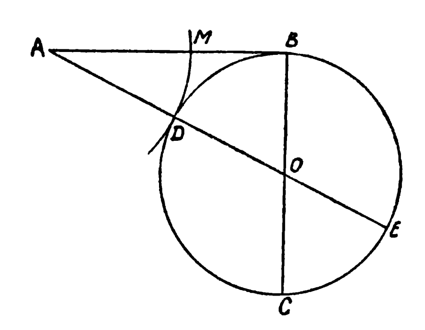
Отсюда $a_{10}^2 = R^2 - R \cdot a_{10}$ или $a_{10}^2 + R \cdot a_{10} - R^2 = 0$. Решая это квадратное ур-ние, получим:

$$a_{10} = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Очевидно, годится только одно решение. Итак,

$$a_{10} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

245. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Пусть требуется данный отрезок AB (чер. 239) разделить на такие две части, чтобы одна из них была среднею пропорциональною между всем отрезком AB и его остальною частью.



Чер. 239.

Для этого построим $BC \perp AB$ и отложим $BC = AB$; затем, принимая BC за диаметр, построим круг, — его центр O расположен в середине отрезка BC. Построим далее прямую AO, которая пересекает круг в точках D и E и наконец отложим на AB отрезок $AM = AD$. Тогда в точке M отрезок AB разделится так, как это требовалось.

В самом деле AE есть секущая и AB касательная к кругу O Поэтому (n°221) имеем:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}.$$

Вычтем из каждого отношения этой пропорции по 1; получим:

$$\frac{AE}{AB} - 1 = \frac{AB}{AD} - 1,$$

или:

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD},$$

или, так как $AE - AB = AE - BC = AE - DE = AD = AM$ и $AB - AD = AB - AM = MB$,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM} \text{ или } \frac{MB}{AM} = \frac{AM}{AB},$$

что и доказывает, что мы достигли требуемого результата.

Заметим, что $\frac{AM}{AB} < 1$, ибо $AM < AB$, следовательно, и $\frac{MB}{AM} < 1$ или $MB < AM$, т.-е. средним пропорциональным является большая из двух частей, на которые мы делим отрезок AB.

246. Теперь мы можем построить правильный вписанный в круг десятиугольник: надо разделить радиус круга в крайнем и среднем отношении и строить хорды, равные большей из полученных частей.

Если разделить окружность на 10 равных частей и соединять точки деления чрез одну, то получим правильный пятиугольник, вписанный в этот круг.

Так как $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$, то легко получить пятнадцатую часть окружности: надо разделить ее на 6 и на 10 равных частей и вычесть из шестой доли окружности ее десятую долю,— этим решается вопрос построения правильного пятнадцатиугольника.

Мы можем затем удваивать число сторон построенных правильных многоугольников. Тогда получим правильные многоугольники о 20 сторонах, о 40 и т. д. сторонах, о 30 сторонах, о 60 сторонах и т. д.

Можно найти выражение чрез R для a_5. Пусть (чер. 238) $MN = a_5$, $MP = a_{10}$ и временно $MQ = x$ ($a_5 = 2x$) и $OQ = y$. Тогда из $\triangle OMQ: x^2 + y^2 = R^2 \ldots (1)$ и из $\triangle MPQ: x^2 + (R - y)^2 = a^2_{10}$ или $x^2 + R^2 - 2Ry + y^2 = a^2_{10}$ или принимая во внимание равенство (1)

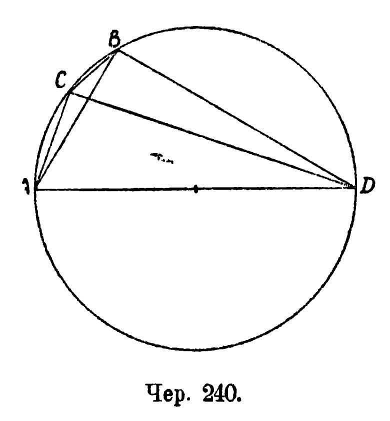
$$2R^2 - 2Ry = a^2_{10}, \text{ откуда } y = \frac{2R^2 - a^2_{10}}{2R} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}.$$

Тогда из (1) $x^2 = R^2 - y^2 = \frac{16R^2 - R^2(1+\sqrt{5})^2}{16} = \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16}$

и
$$x = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Следовательно, $a_5 = 2x = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

Сторона a_{15} может быть выражена чрез R помощью теоремы Птоломея (n°224). Пусть AB (чер. 240) $= a_6 = R$, $AC = a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$; тогда $CB = a_{15}$. Далее имеем $AD = 2R$, $CD = \sqrt{4R^2 - a_{10}^2}$ и $BD = a_3 = R\sqrt{3}$.



Чер. 240.

Тогда по теореме Птоломея имеем

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + CB \cdot AD,$$

или $R\sqrt{4R^2 - a_{10}^2} = a_{10} \cdot a_3 + a_{15} \cdot 2R$,

откуда $a_{15} = \frac{R\sqrt{4R^2 - a_{10}^2} - a_{10} \cdot a_3}{2R}$

Вычислений здесь не выполняем.

247. Упражнения. 1. По данной стороне a правильного двенадцатиугольника вычислить его площадь.

Пусть AB (чер. 241) одна из сторон правильного двенадцатиугольника; построим прямую OB и OC $\perp$ $\perp$ AB. Тогда имеем $CB = \frac{a}{2}$ и, называя OB чрез R и OC чрез p, имеем $p^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Но в n°243 найдено, что $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; теперь имеем $a = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. Подставив это выражение, найдем $p^2 = \frac{a^2}{2-\sqrt{3}} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{1} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(7+4\sqrt{3})}{4}$ и $p = \frac{a\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2}$. Тогда, согласно n° 203, получим $Q =$

$$= \frac{12a \cdot a\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2 \cdot 2} = 3a^2\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$$

Чер. 241.

2. Вычислить площадь правильного шестиугольника, десятиугольника, восьмиугольника, если дана сторона a каждого из них.

3. Апофема правильного десятиугольника $= p$; вычислить его площадь.

4. Апофема правильного десятиугольника $= 2$ дм. Вычислить его площадь.

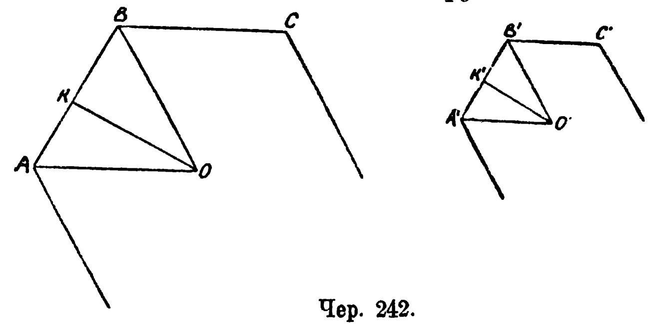
5. Площадь правильного шестиугольника, вписанного въ круг, $= 54\sqrt{3}$ квадр. един. Вычислить площадь правильного треугольника, вписанного в тот же круг.

6. На одном и том же отрезке построены правильный треугольник и квадрат. Радиус круга, описанного около треугольника, $= R$. Найти радиус круга, описанного около квадрата.

248. Пусть имеем какой-либо правильный многоугольник об n сторонах. Легко вычислить каждый внутренний угол такого многоугольника. В самом деле, мы знаем (n°81), что сумма внутренних углов n-угольника вычисляется по формуле $2d(n-2)$ или в градусах $180°(n-2)$.

Так как в правильном многоугольнике все углы между собою равны и всех их n, то каждый угол равен $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Так, напр., угол правильного шестиугольника $=\frac{180°.4}{6}=120°$, угол правильного десятиугольника $=\frac{180 . 8}{10}=144°$, угол правильного шестнадцатиугольника $=\frac{180°.14}{16}=157°30'$ и т. д.



Чер. 242.

Мы можем увидать из этой же формулы, что с увеличением числа сторон угол многоугольника все увеличивается и приближается к 180°. В самом деле, этот угол равен

$$\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{180°.n-360°}{n}=180°-\frac{360°}{n}.$$

С увеличением числа n дробь $\frac{360°}{n}$ все уменьшается и может быть сделана, как угодно мала.

Затем из этой же формулы видим, что внутренний угол правильного многоугольника завсит только от числа сторон, но не зависит от самой стороны: если мы построим 2 правильных многоугольника $ABC\ldots$ и $A'B'C'$ (чер. 242) с одинаковым числом сторон, то, несмотря на то, что у одного каждая сторона больше

каждой стороны другого, их внутренние углы должны быть равны между собою. Соединим еще центры этих многоугольников O с вершинами A и B, O' с вершинами A' и B'. Тогда $\triangle\, OAB \backsim \triangle\, O'A'B'$, так как углы в этих треугольниках при вершинах A, B, A' и B' равны между собою, ибо каждый из них есть половина одного из равных внутренних углов многоугольников; построим еще апофемы OK и $O'K'$ многоугольников. Тогда имеем:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OK}{O'K'} \text{ (последнее на основании n°211),}$$

т.-е. отношение сторон правильных одноименных многоугольников равно отношению их радиусов и равно отношению их апофем.

Называя число сторон каждого многоугольника чрез n и умножая оба члена первого отношения на n, отчего это отношение не изменится, получим:

$$\frac{AB\,.\,n}{A'B'\,.\,n} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OK}{O'K'}.$$

Но $AB\,.\,n$ есть периметр первого многоугольника; также $A'B'.\,n$ — периметр второго. Следовательно,
отношение периметров правильных одноименных многоугольников равно отношению их радиусов или их апофем.

249. Теперь мы можем найти зависимость между стороною какого-либо правильного многоугольника, вписанного в круг (ее обозначим a_n), стороною одноименно описанного около того же круга правильного многоугольника (ее обозначим b_n) и радиусом R этого круга. Пусть $ABCD\ldots$ есть правильный многоугольник, вписанный в круг O (чер. 243); следовательно, в точках A, B, C, D и т. д. круг разделен на равные части. Поэтому, построив в этих точках касательные к кругу, получим правильный описанный многоугольник MNP с тем же числом сторон. Построим апофему OK вписанного многоугольника, а апофемою описанного служит радиус нашего круга (например, OB). Тогда к нашим двум многоугольникам применим предыдущий n°, и мы имеем:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{OK}{OB} \qquad (1)$$

AB мы заменим чрез a_n, MN чрез b_n, OB чрез R, а OK найдем из $\triangle OKB$ ($\angle K$ прямой);

$$OK^2 = OB^2 - BK^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{a_n^2}{4} = \frac{4R^2 - a_n^2}{4}$$

$$\left(BK = \frac{1}{2} AB = \frac{a_n}{2}\right),$$

$$\text{отсюда } OK = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}.$$

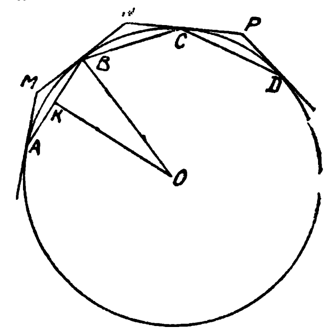
Подставляя в пропорцию (1), получим:

$$a_n : b_n = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2} : R \text{ или } \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2R}.$$

Отсюда можно выразить b_n чрез a_n и R:

$$b_n = \frac{2a_nR}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Этою формулою можно пользоваться для нахождения формул, выражающих стороны описанных правильных многоугольников чрез радиус круга. Найдем, например, формулу для b_6 (т.-е. для стороны правильного описанного около круга 6-угольника)



Чер. 243.

$$b_6 = \frac{2a_6R}{\sqrt{4R^2 - a_6^2}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - R^2}} \text{ (так как } a_6 = R) = \frac{2R^2}{\sqrt{3R^2}} =$$

$$= \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

250. В n°243 мы указали возможность находить формулы для a_8, a_{16} и т. д. для a_{12}, a_{24} и т. д. Здесь дадим общую формулу, выражающую сторону правильного многоугольника, вписанного в круг, с двойным числом сторон чрез сторону данного и через радиус круга. Пусть сторона данного вписанного правильного многоугольника есть AB (чер. 244), обозначим ее a_n. Построим $OKC \perp AB$; тогда OK есть апофема нашего правильного многоугольника и она равна, как найдено в предыдущем n°,

$\frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}$; построив еще хорду AC, увидим, что эта хорда и есть сторона правильного вписанного в этот же круг многоугольника с двойным, против данного, числом сторон, — обозначим ее чрез a_{2n}. Итак, имеем: $AB = a_n$; следовательно,

$$AK = \frac{a_n}{2},\ OK = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2},\ AC = a_{2n}$$

и, конечно, $OA = OC = R$.

Чер. 244.

Далее находим:

$$CK = OC - OK = R - \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2} = \frac{2R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}$$

и из $\triangle AKC\ (\angle K = d) : AC^2 = AK^2 + CK^2,$

$$\text{или } a_{2n}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{4R^2 - 4R\sqrt{4R^2 - a_n^2} + 4R^2 - a_n^2}{4} =$$

$$= \frac{8R^2 - 4R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{4} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}$$

откуда $$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Это и есть искомая формула.

Мы знаем, например, что $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; теперь мы можем найти выражение чрез R для a_{24}, заменяя n в найденной формуле числом 12:

$$a_{24} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_{12}^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})} =$$

$$= R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

251. Упражнения. 1. Найти формулы для a_8 и затем для b_8.

2. Найти формулу для a_{20}.

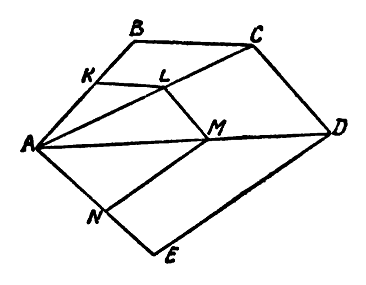
3. Радиус круга $= R$. Найти площадь описанного около него 12-угольника.

4. Найти формулы для a_{16} и b_{16}.

ГЛАВА XXV.

Подобие многоугольников.

252. Понятие о подобии треугольников распространяется и на многоугольники. Пусть дан многоугольник $ABCDE$ (черт. 245); выполним построение аналогичное n°206. Построим диагонали AC и AD и, выбрав какую-либо точку K на стороне AB между точками A и B или вне отрезка AB, построим $KL \parallel BC$ до пересечения с диагональю AC, затем $LM \parallel CD$ до пересечения с AD и, наконец, $MN \parallel DE$ до пересечения с AE. Тогда получится многоугольник $AKLMN$, который связан с $ABCD$ следующими зависимостями:



Чер. 245.

1) Углы одного многоугольника равны попарно углам другого: угол A у них общий, $\angle K = \angle B$ (как соответственные), $\angle KLM = \angle BCD$, ибо $\angle KLA = \angle BCA$ и $\angle ALM = \angle ACD$ и т. д.

2) Сходственные стороны этих многоугольников пропорциональны, т.-е. отношение одной пары сходственных сторон равно отношению другой пары, равно отношению третьей пары и т. д.

„Сходственные" стороны здесь надо понимать несколько иначе, чем для треугольников: здесь считаем сходственными сторонами те, которые заключены между равными углами, например, BC и KL.

Справедливость указанной пропорциональности видна следующим образом:

$\triangle AKL \backsim \triangle ABC$, следовательно, $\frac{AK}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{AL}{AC}$.

$\triangle ALM \backsim \triangle ACD$, следовательно, $\frac{AL}{AC} = \frac{LM}{CD} = \frac{AM}{AD}$.

$\triangle AMN \backsim \triangle ADE$, следовательно, $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DE} = \frac{AN}{AE}$.

Мы видим, что среди первых трех равных отношений и среди вторых трех равных отношений имеется одно одинаковое $\frac{AL}{AC}$; также и последние три отношения связываются с предыдущими отношением $\frac{AM}{AD}$. Поэтому, пропуская отношения диагоналей, получим:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{LM}{CD} = \frac{MN}{DE} = \frac{AN}{AE}.$$

Все это остается, как легко видеть, справедливым и для многоугольника с большим, чем у нас, числом сторон.

Если мы многоугольник $AKLMN$ перенесем в другое место плоскости, то найденные выше 2 соотношения этого многоугольника с $ABCDE$ останутся в силе; такие многоугольники называются **подобными**. Итак, **два многоугольника называются подобными, если углы одного равны попарно углам другого и если сходственные стороны их пропорциональны.**

Мы, следовательно, умеем строить многоугольник, подобный данному. Мы построили $AKLMN \backsim ABCDE$.

Мы видим еще, что в многоугольниках $ABCDE$ и $AKLMN$ построены диагонали из их соответственных вершин, причем получилось два ряда подобных треугольников: $\triangle AKL \backsim \triangle ABC$, $\triangle ALM \backsim \triangle ACD$ и $\triangle AMN \backsim \triangle ADE$ — треугольники эти одинаково расположены в обоих многоугольниках.

Возникает вопрос, останется ли в силе последнее свойство, если мы построим многоугольник, подобный данному, каким-либо еще способом, не тем, которым мы пользовались здесь.

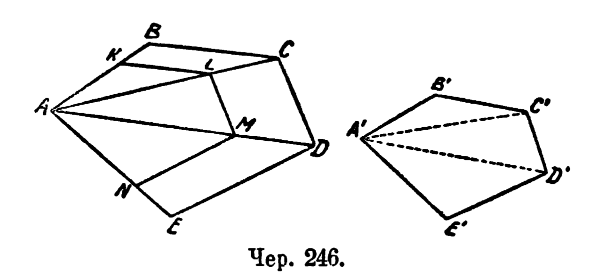
253. Пусть как-либо построен многоугольник $A'B'C'D'E' \backsim$ многоугольнику $ABCDE$ (чер. 246), т.-е. так, что

$$\angle A' = \angle A,\ \angle B' = \angle B,\ \angle C' = \angle C,\ \angle D' = \angle D,$$
$$\angle E' = \angle E\,. \qquad (1)$$

и

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} \qquad (2)$$

Вопрос конца предыдущего n° равносилен другому: можно ли привести эти два многоугольника в положение, чтобы, например, точка A' совпала с A, а остальные вершины были бы расположены попарно на прямых, идущих из этой общей точки, и чтобы сходственные стороны их или были параллельны, или сторона одного многоугольника расположилась бы на стороне другого.



Чер. 246.

Решим этот вопрос. Для этого отложим на стороне AB от точки A отрезок $AK = A'B'$ и, пользуясь предыдущим n°, построим многоугольник $AKLMN \backsim ABCDE$.

Остается выяснить, может ли многоугольник $A'B'C'D'E'$ совпасть при наложении с $AKLMN$.

Мы имеем: $\angle K = \angle B$, $\angle L = \angle C$ ($\angle KLM = \angle BCD$), $\angle M = \angle D$ и $\angle N = \angle E$. Сравнивая эти равенства с равенствами (1), находим $\angle K = \angle B'$, $\angle L = \angle C'$ и т. д., то-есть у многоугольников $A'B'C'D'E'$ и $AKLMN$ все углы попарно равны.

Далее имеем: $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{KL}{BC} = \dfrac{LM}{CD} = \dfrac{MN}{DE} = \dfrac{NA}{EA}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами (2) и принимая во внимание, что $AK = A'B'$, легко получаем $KL = B'C'$, $LM =$

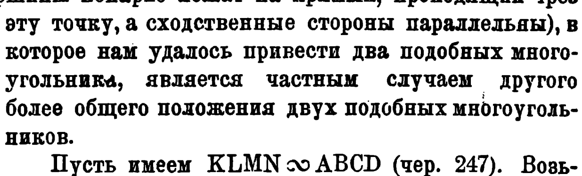
$=C'D'$ и т. д., т.-е. все стороны многоугольников $A'B'C'D'E'$ и $AKLMN$ попарно равны. Наложим многоугольник $A'B'C'D'E'$ на $AKLMN$ так, чтоты A' попала в A и сторона $A'B'$ совпала бы с AK (мы ведь строили $AK=A'B'$); тогда, в силу равенства углов B' и K, сторона $B'C'$ пойдет по KL, в силу равенства сторон KL и $B'C'$, точка C' попадет в L и т. д.

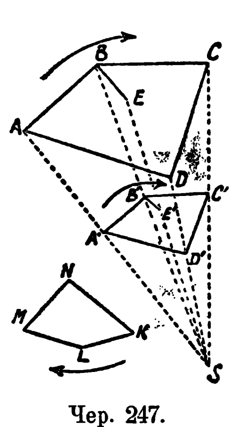
Итак, $A'B'C'D'E'$ совпадает с $AKLMN$, а следовательно, если построим диагонали $A'C'$ и $A'D'$, получим ряд треугольников, подобных и одинаково расположенных с $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и т. д.

Поэтому заключаем: **Если построить в подобных многоугольниках диагонали из соответственных вершин, то получим 2 ряда подобных и одинаково расположенных треугольников.**

Легко увидать справедливость и обратного заключения: если, $\triangle A'B'C' \infty \triangle ABC$, $\triangle A'C'D' \infty \triangle ACD$ и $\triangle A'D'E' \infty \triangle ADE$, то многоугольник $A'B'C'D'E' \infty$ многоугольнику $ABCDE$. Тогда $\triangle A'B'C' = AKL$ $\triangle A'C'D' = \triangle ALM$ и $\triangle A'D'E' = \triangle AMN$, откуда следует равенство многоугольников $A'B'C'D'E'$ и $AKLMN$ и, следовательно, подобие $A'B'C'D'E$, и $ABCDE$.

254. То положение (две соответственных вершины сливаются в одной точке, остальные вершины попарно лежат на прямых, проходящих чрез


эту точку, а сходственные стороны параллельны), в которое нам удалось привести два подобных многоугольника, является частным случаем другого более общего положения двух подобных многоугольников.



Чер. 247.

Пусть имеем $KLMN \infty ABCD$ (чер. 247). Возьмем какую-либо точку S и соединим ее со всеми вершинами A, B, C и D первого многоугольника. Постараемся построить многоугольник, равный многоугольнику $KLMN$, так, чтобы его вершины лежали на прямых SA, SB, SC и SD и стороны были бы параллельны сторонам многоугольника $ABCD$.

Для этого отложим на стороне AB отрезок $AP=KL$ (полагаем, что KL и AB сходственные стороны) и построим $PB' \parallel AS$ (на чертеже точка P и прямая PB' не даны). Чрез точку B', где SB пересекается с PB', построим $B'A' \parallel AB$. Тогда $A'B'=AP=KL$, затем построим $B'C' \parallel BC$, чрез точку C', где $B'C'$ пересекается с SC, проведем $C'D' \parallel CD$ и точку D', где $C'D'$ пересекается с SD, соединим с A'. Полу-

чим многоугольник $A'B'C'D'$, который, как это сейчас увидим, подобен многоугольнику $ABCD$.

Так как $A'B' \parallel AB$, то $\triangle SA'B' \backsim \triangle SAB$,

откуда
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} \quad \ldots\ldots (1)$$

Так как $B'C' \parallel BC$, то $\triangle SB'C' \backsim \triangle SBC$,

откуда
$$\frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SC} \quad \ldots (2)$$

Так как $C'D' \parallel CD$, то $\triangle SC'D' \backsim \triangle SCD$,

откуда
$$\frac{SC'}{SC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{SD'}{SD} \quad \ldots (3)$$

Отсюда можно вывести, что $\frac{SA'}{SA} = \frac{SD'}{SD}$, а следов. $\triangle SA'D' \backsim \triangle SAD$, так как две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны ($\angle S$ общий), — следовательно, $A'D' \parallel AD$ и
$$\frac{SD'}{SD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{SA'}{SA} \quad \ldots (4)$$

Из равенств отношений (1), (2), (3) и (4) легко получаем;
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} \quad . (5)$$

Кроме того, $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$ и т. д., как углы с параллельными сторонами. Следовательно, $A'B'C'D' \backsim ABCD$.

Далее легко увидать, что $KLMN = A'B'C'D'$. В самом деле, $\angle K = \angle A$ но $\angle A = \angle A'$, следовательно, $\angle K = \angle A'$; также $\angle L = \angle B'$ и т. д. — углы у наших многоугольников равны. Кроме того, из подобия $KLMN \backsim$ $\backsim ABCD$ получаем:
$$\frac{KL}{AB} = \frac{LM}{BC} = \frac{MN}{CD} = \frac{NK}{DA}.$$

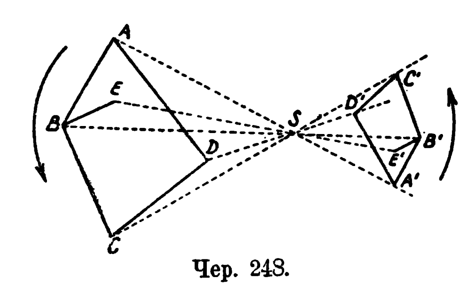
Сравнивая эти равные отношения с равенствами (5) и имея в виду, что $A'B' = KL$, находим: $B'C' = LM$, $C'D' = MN$, $D'A' = NK$. Теперь легко, как это делали выше, увидать, что $KLMN$ при наложении совместится с $A'B'C'D'$. Следовательно, нам удалось поместить данные подобные многоугольники в такое положение, что их вершины расположены попарно на прямых, проходящих чрез точку S и их сходственные стороны параллельны, к чему мы и стремились.

Заметим еще, что соответственные вершины в наших многоугольниках следуют друг за другом в одном направлении (см. стрелки около многоугольников $ABCD$, $KLMN$ и $A'B'C'D'$) — по часовой стрелке.

Если бы вершины одного многоугольника, соответствующие последовательным вершинам другого, шли друг за другом в направлении, обратном тому, как они расположены в другом, то удалось бы поместить

наши многоугольники так, чтобы соответствующие вершины располагались по разные стороны от точки S (см. чер. 248).

Точка S, где сходятся прямые, соединяющие пары соответственных вершин многоугольников, называется центром подобия; в первом случае (чер. 247), когда обе соответственные вершины (например, A и A′) расположены в одной стороне от S, центр подобия называется внешним, а во втором (чер. 248), когда соответствующие вершины расположены по разные стороны точки S, центр подобия называется внутренним. Если подобные многоугольники расположены так, что они имеют центр подобия, то говорят, что они подобно расположены.



Чер. 248.

255. Если нам дан многоугольник ABCD (чер. 247 или 248), — будем данный многоугольник называть оригиналом, — мы можем, выбрав произвольную точку S, получать его изображения, подобные ему в каком угодно масштабе, — этим именем называют отношение какого-либо отрезка изображения к соответствующему отрезку в оригинале (в данном многоугольнике). Это отношение называют еще коэффициентом подобия — обозначим его через k. Пока еще для нас коэффициентом подобия является отношение стороны изображения к стороне оригинала,

т.-е.
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = k.$$

В дальнейшем мы распространим это понятие на отношение всяких двух отрезков изображения и оригинала, сходственных между собою.

Из равенств (1), (2), (3) и (4) предыдущего n°, имеем:

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{A'B'}{AB} = k,$$

т.-е. отношение расстояний от центра подобия соответственных вершин изображения и оригинала = коэффициенту подобия.

Под именем фигура (плоская) мы понимаем совокупность точек и линий плоскостей. Многоугольник ABCD — есть фигура. Присоединим еще одну точку (выбранную по произволу) E — получим новую фигуру состоящую из многоугольника ABCD и точки E, — найдем изображение точки E. Для этого построим прямую SE и на ней отложим отрезок SE так, чтобы $\frac{SE'}{SE} = k$ (такой отрезок легко построить, пользуясь n°214); этот отрезок мы можем отложить по направлению SE (чер. 247); или в

обратном направлении (чер. 248). Полученная точка E′ и есть изображение точки E — другими словами точки E′ и E суть соответственные точки в наших двух подобных и подобно расположенных фигурах.

Соединив точку E, например, с B и точку E′ с B′ (B и B′ суть тоже соответственные точки), получим два соответствующих друг другу отрезка BE и B′E′.

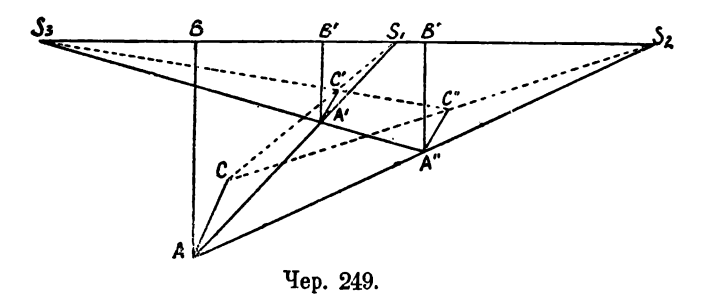
Легко увидать, что $\triangle SBE \sim \triangle SB'E'$ (так как $\angle BSE = \angle B'SE$ и стороны, составляющие эти углы, пропорциональны: $\frac{SB'}{SB'} = k$ и $\frac{SE'}{SE} = k$, — следовательно, $\frac{SB'}{SB} = \frac{SE'}{SE}$), отсюда вытекает:

$$1)\ B'E' \parallel BE \text{ и } 2)\ \frac{B'E'}{BE} = \frac{SB'}{SB} = k$$

т.-е. соответствующие друг другу отрезки в изображении и оригинале 1) параллельны между собою и 2) их отношение равно коэффиценту подобия.

Отсюда вытекает возможность следующего построения для нахождения точки, соответствующей данной в оригинале точке, если уже имеем одну пару соответствующих точек и известен центр подобия: пусть имеем пару соответствующих точек B и B′ и требуется найти точку, соответствующую точке E, — строим прямые SE и BE и чрез B′ строим прямую, параллельную BE, ее точка пересечения E′ с SE и даст искомую точку.

256. Построим для какой-либо фигуры, одна точка которой есть A (чер. 249), ее изображения, принимая две произвольных точки S_1 и S_2



Чер. 249.

за внешние центры подобия и числа k_1 и k_2 за коэффициенты подобия. Пусть в первом изображения точке A соответствует точка A′ и во втором изображении этой же точке соответствует точка A″.

Присоединим еще к данной фигуре какую-либо точку B, лежащую на прямой S_1S_2; тогда этой точке B соответствуют в первом изображении точка B′ и во втором точка B″, причем точки B′ и B″ должны лежать на той же прямой S_1S_2 и прямые AB, A′B′ и A″B″ должны быть параллельны и одинаково направлены.

Тогда имеем:

$$\frac{A'B'}{AB}=k_1 \text{ и } \frac{A''B''}{AB}=k_2.$$

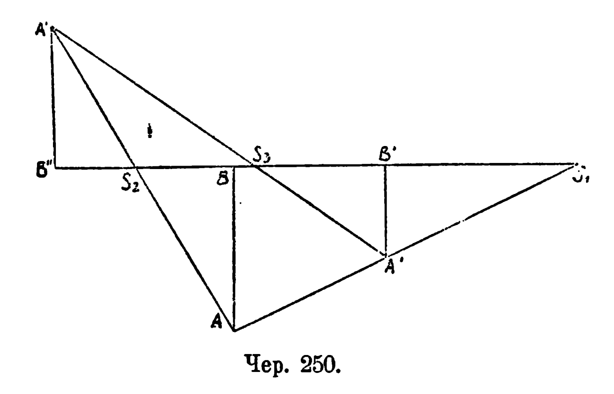
Отсюда находим:

$$\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{k_1}{k_2}.$$

Соединив точки A' и A'', найдем точку пересечения S_3 прямых $A''A'$ и S_2S_1. Тогда из подобия треугольников $S_3A'B'$ и $S_3A''B''$ находим:

$$\frac{S_3B'}{S_3B''}=\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{k_1}{k_2},$$

т.-е. точка S_3 должна делить отрезок $B'B''$ внешним образом в отношении, равном данному числу $\frac{k_1}{k_2}$. Мы знаем (n°217), что существует только одна точка, которая делит данный отрезок $B'B''$ в данном отно-



Чер. 250.

шении внешним образом. Если мы возьмем какую-либо еще точку C данной фигуры и построим ее изображения C' и C'', то, соединив точки C' и C'' и взяв точку пересечения, назовем ее опять S_3, прямой $C'C''$ с прямой S_1S_2, получим, что $\triangle S_3B'C' \backsim \triangle S_3B''C''$ ($B''C'' \parallel BC$ и $B'C' \parallel BC$, следовательно, $B''C'' \parallel B'C'$), откуда опять найдем, что $\frac{S_3B'}{S_3B''}=\frac{k_1}{k_2}$, т.-е. новая точка S_3 совпадет с прежнею. Следовательно, S_3 есть центр подобия фигур ($A'B'C'$...) и ($A''B''C''$...) и притом внешний, ибо направления, в котором следуют друг за другом соответствующие точки в обеих фигурах, одинаковы. Из этого заключаем, что фигуры ($A'B'C'$...) и ($A''B''C''$...) также имеют внешний центр подобия и он расположен на одной прямой с центрами S_1 и S_2.

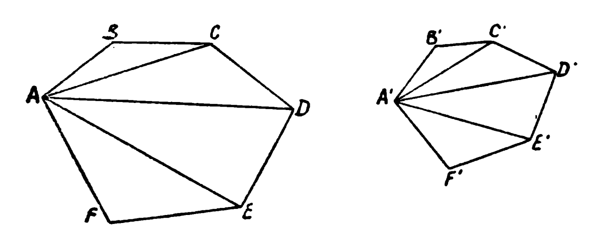
Если один из центров подобия S_1 взять внешний, а другой S_2 внутренний (чер. 250), то направления соответствующих отрезков таковы: $A'B'$ одинаково с направлением AB, но $A''B''$ обратно направлению AB,— следовательно, направление $A''B''$ обратно $A'B'$ и S_3 явится внутренним центром подобия фигур ($A'B'$...) и ($A''B''$...).

Если взять оба центра подобия внутренними (например, S_2 и S_3 на черт. 250), то легко увидать, что третий центр подобия окажется внешним. Итак, вообще:

Если три фигуры попарно подобно расположены, то три центра подобия расположены на одной прямой, причем или все три они внешние, или два из них внутренних, а один внешний.

257. Отношение периметров и площадей подобных многоугольников.

Пусть имеем два подобных многоугольника $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ (чер. 251). Назовем коэффициент подобия чрез k.



Чер. 251.

Тогда $$\frac{A'B'}{AB}=k, \frac{B'C'}{BC}=k \text{ и т. д.,}$$

откуда $$A'B'=k\ .\ AB,\ B'C'=k\ .\ BC,\ C'D'=k\ \ CD, ...$$

Сложив эти равенства по частям и вынеся множитель k во второй части за скобку, получим:

$$A'B'+B'C'+C'D'+...=k(AB+BC+CD+...),$$

откуда $$\frac{A'B'+B'C'+C'D'...}{AB+BC+CD+...}=k=\frac{A'B'}{AB},$$

т.-е. отношение периметров подобных треугольников равно отношению сходственных сторон (или равно коэффициенту подобия).

Выберем две соответственных вершины, напр., A и A', и построим проходящие чрез них диагонали. Тогда мы знаем: 1) (из n°253) $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ и т. д. 2) (из

n°212). Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон, следовательно,

$$\frac{\text{пл. } \triangle A'B'C'}{\text{пл. } \triangle ABC}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2=k^2;\ \frac{\text{пл. } \triangle A'C'D'}{\text{пл. } \triangle ACD}=\left(\frac{C'D'}{CD}\right)^2=k^2 \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$\text{пл. } \triangle A'B'C'=k^2 \,.\, \text{пл. } \triangle ABC;\ \text{пл. } A'C'D'=k^2 \,.\, \text{пл. } \triangle ACD;$$
$$\text{пл. } \triangle A'D'E'=k^2 \,.\, \text{пл. } \triangle ADE...$$

Сложив эти равенства по частям и вынеся общего множителя k^2 во второй части за скобку, получим:

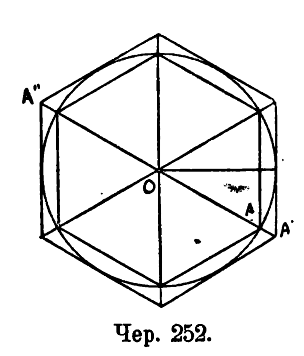
$$\text{пл. } \triangle A'B'C'+\text{пл. } A'C'D'+\text{пл. } \triangle A'D'E'+...=k^2(\text{пл. } \triangle ABC+$$
$$+\text{пл. } \triangle ACD+\text{пл. } \triangle ADE+...),$$

или
$$\text{пл. } A'B'C'D'E'F'=k^2 \,.\, \text{пл. } ABCDEF,$$

откуда
$$\frac{\text{пл. } A'B'C'D'E'F'}{\text{пл. } ABCDEF}=k^2=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2,$$

т.-е. отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон (или равно квадрату коэффициента подобия).

258. Два правильных одноименных многоугольника всегда подобны. В самом деле, углы у одноименных многоугольников одинаковы (n°248), а так как все стороны каждого равны между собою, то, очевидно, отношение любой стороны одного к любой стороне другого есть число постоянное.



Чер. 252.

Если в круг впишем какой-либо правильный многоугольник (чер. 252) и чрез середины дуг, стягиваемых его сторонами, построим касательные к кругу, то получим правильный одноименный многоугольник, описанный около этого круга. Не трудно выяснить (предоставляем это желающим), что полученные два правильные многоугольника подобно расположены и центр круга служит их внешним центром подобия, — внешним потому, что каждая пара соответствующих точек (напр., A и A') расположена в одном направлении от центра (если многоугольник имеет четное число сторон, то центр круга можно считать и внутренним центром подобия, надо лишь считать, что, например, точке A соответствует точка A'').

259. Упражнения. 1. Стороны одного пятиугольника равны соответственно 12, 14, 10, 8 и 16 дм. Найти стороны другого пятиугольника, подобного первому, если его периметр = 80 дм.

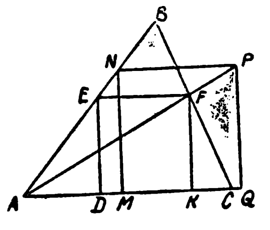
2. Сумма площадей двух подобных многоугольников равна 250 кв. дм., а отношение двух сходственных сторон $= \frac{3}{4}$. Вычислить площадь каждого из них.

3. Показать, что если в круг вписан правильный многоугольник с нечетным числом сторон и в его вершинах построены касательные к кругу, то получится описанный многоугольник, подобно расположенный с вписанным, — центр круга служит их внутренним центром подобия.

4. Дан треугольник; построить другой △, подобно расположенный с первым так, чтобы центр тяжести первого служил внутренним центром подобия и чтобы коэффициент подобия $= \frac{1}{2}$. Выяснить при помощи этого, как расположены точка высот, центр тяжести и центр описанного круга данного треугольника.

5. В данный треугольник вписать квадрат.

Пусть ABC данный треугольник (чер. 253) и DEFK искомый квадрат. Построим еще квадрат MNPQ, чтобы одна сторона MQ лежала на стороне AC треугольника и точка N на стороне AB. Легко видеть, что квадрат MNPQ подобно расположен с искомым квадратом DEFK и внешним их центром подобия является точка A; следовательно, точка F лежит на прямой AP. После нахождения точки F искомый квадрат легко построить.



Чер. 253.

6. Дан угол и точка внутри его. Найти на одной стороне угла точку, равноудаленную от данной точки и от другой стороны.

Задача решается тем же приемом.

7. Построить △ по его высотам.

Легко получить, называя стороны треугольника чрез a, b и c и соответствующие высоты чрез h_a, h_b и h_c, следующую зависимость:

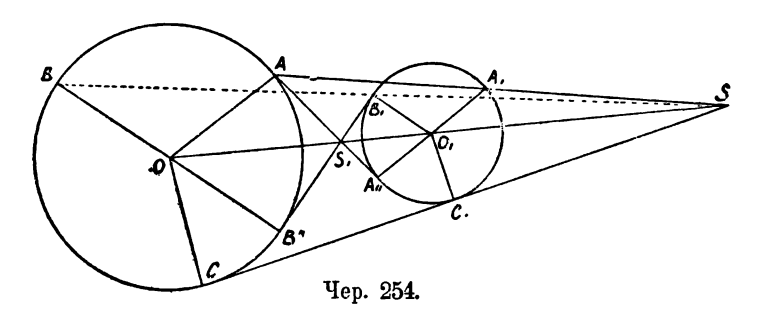
$$ah_a = bh_b = ch_c, \text{ откуда } a : b = h_b : h_a \text{ и } b : c = h_c : h_b = h_a : \frac{h_b h_a}{h_c}.$$

Легко построить отрезок $x = \frac{h_b h_a}{h_c} \left(\frac{x}{h_a} = \frac{h_b}{h_c} \right.$ — построение 4-го пропорционального), после чего построим △ со сторонами h_b, h_a и x. Этот треугольник подобен искомому, так как $a : b : c = h_b : h_a : x$; остается построить треугольник подобный только что построенному так, чтобы одна его высота была равна данной.

ГЛАВА XXVI.

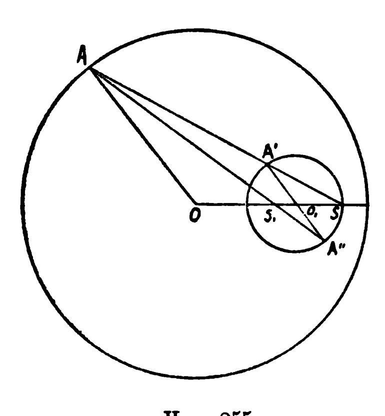
Подобие кругов. Радикальная ось.

260. Возьмем два круга O и O_1 (чер. 254 и 255). Построим радиус OA и параллельный ему радиус другого круга O_1A_1, который имеет



Чер. 254.

одинаковое направление с OA, или O_1A_{11} тоже параллельный OA, но имеющий обратное с ним направление. Построим затем прямые AA_1 и AA_{11}, проходящие чрез концы этих радиусов. Тогда представляется следующая задача:



Чер. 255.

По данным радиусам R и r кругов и по расстоянию их центров $OO_1 = d$ найти расстояние от одного из центров (напр., от O) точек пересечения линии центров с прямою AA_1 и с прямою AA_{11}.

Назовем OS чрез x; тогда $O_1S = x - d$. $\triangle OAS \backsim \triangle O_1A_1S$, следовательно, $\frac{OS}{O_1S} = \frac{OA}{O_1A_1}$ или $\frac{x}{x-d} = \frac{R}{r}$ откуда $rx = Rx - dR$.

Определяя отсюда x, получим

$$x = \frac{dR}{R-r}.$$

Отсюда мы видим, что положение точки пересечения S прямых OO_1 и AA_1 не зависит от того, в каком направлении от центра мы построили параллельные радиусы OA и O_1A_1, так что прямая BB_1, соединяющая концы другой пары параллельных радиусов OB и O_1B_1, должна пройти чрез точку S и, кроме того, имеем ($\triangle O_1SB_1 \backsim \triangle OSB$): $\frac{SB_1}{SB} = \frac{r}{R}$. Таким образом точка S обладает всеми свойствами внешнего центра подобия двух подобно расположенных фигур.

Также, называя OS_1 чрез y, получим $S_1O_1 = d - y$ и из подобия $\triangle OAS_1$ и $\triangle O_1A_{11}S_1$: $\frac{y}{d-y} = \frac{R}{r}$. Отсюда находим $yr = dR - yR$ и

$$y = \frac{dR}{R+r}.$$

Отсюда видим, что положение точки S_1 также не зависит от того, какую именно пару параллельных, но идущих в обратных направлениях, радиусов мы взяли. Чрез эту же точку S_1 должна пройти прямая B_1B_{11}, соединяющая концы радиусов OB_{11} и O_1B_1 параллельных, но имеющих обратные направления. Кроме того, имеем ($\triangle O_1B_1S_1 \sim \triangle OB_{11}S_1$) $\frac{S_1B_1}{S_1B_{11}} = \frac{r}{R}$.

Таким образом точка S_1 обладает всеми свойствами внутреннего центра подобия двух кругов.

Если один круг лежит внутри другого (чер. 255), то оба центра подобия расположены внутри меньшего круга: внешний лежит вне отрезка OO_1, а внутренний — внутри его.

Центры O и O_1 также соответствуют друг другу, так как $\frac{SO_1}{SO} = \frac{r}{R}$ (из подобия $\triangle OAS$ и $\triangle O_1A_1S$) и $\frac{S_1O_1}{S_1O} = \frac{r}{R}$ (из подобия $\triangle S_1O_1A_{11}$ и $\triangle S_1OA$).

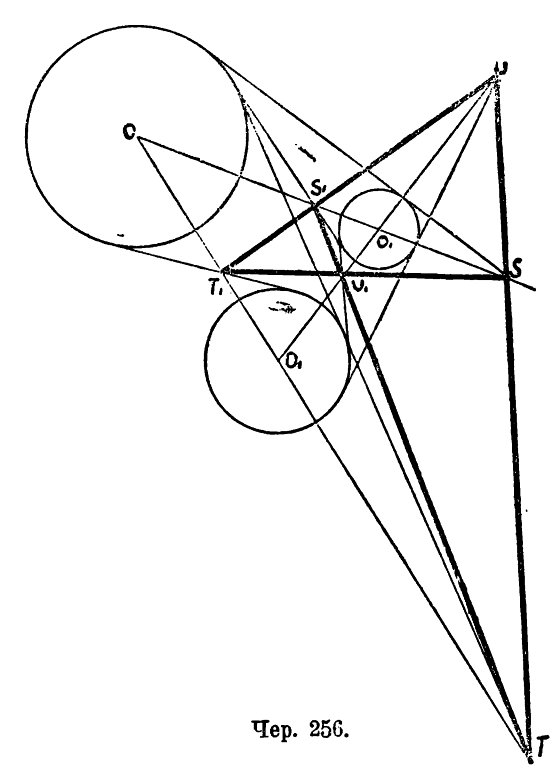
Итак, **всякие два круга подобно расположены и имеют два центра подобия — внутренний и внешний**; центру одного круга соответствует центр другого и любой точке одного соответствует та точка другого, которая расположена на радиусе, параллельном радиусу первого круга, идущему чрез взятую точку, и имеющем то же или обратное направление. Обратно: если чрез S построить любую прямую A и соответствующие точки пересечения соединить с центрами, то полученные радиусы должны быть параллельны между собою.

261. Если окажется, что один радиус, напр., O_1C_1 (чер. 254), перпендикулярен к прямой SC_1, то и радиус OC, соединяющий центр O другого круга с его точкою C, соответствующей точке C_1, должен быть также перпендикулярен к SC. Отсюда следует, что касательная из точки S к одному из наших кругов должна касаться и другого круга. Точно так же, если построим касательную к одному кругу чрез точку S_1, то она должна касаться и другого круга.

Этим пользуются для решения задачи: **построить общую касательную к двум данным кругам.**

Надо найти сначала их центры подобия, для чего надо построить радиус OA и параллельный ему диаметр A_1A_{11} второго круга (чер. 254). Соединив концы A и A_1, найдем внешний центр подобия S и соединив A и A_{11}, найдем внутренний центр подобия S_1. Затем чрез найденные центры подобия S и S_1 построим касательные к одному кругу — они и

должны быть общими касательными. Всего общих касательных у двух кругов может быть 4. Если два круга имеют внешнее касание, то точка касания служит их внутренним центром подобия, и общих касательных тогда будем иметь 3; если два круга пересекаются, то внутренний центр подобия лежит внутри обоих кругов, и из него нельзя построить касательных, — тогда получим только две общих касательных чрез внешний центр подобия; если 2 круга имеют равные радиусы, то внешний центр подобия удаляется в бесконечность и тогда две внешних касательных параллельны линии центров; если два круга имеют внутреннее касание, то точка касания служит их внешним центром подобия, — тогда возможна лишь одна общая касательная; если, наконец, один круг внутри другого, то оба центра подобия расположены внутри обоих кругов, и общих касательных вовсе не существует.



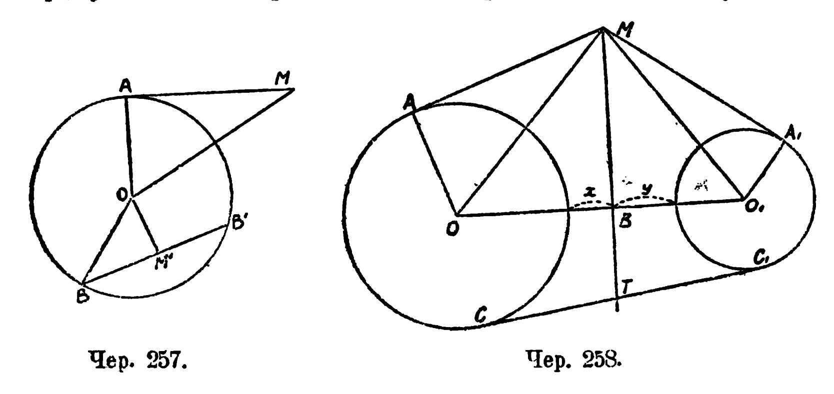
Чер. 256.

262. Можно применить понятие о центре подобия кругов к решению задачи, которую раньше мы решили другим способом (n°227 зад. 3): построить круг, касающийся двух пересекающихся прямых и проходящий чрез данную точку.

Точка пересечения данных прямых является внешним центром подобия искомого круга и какого-либо еще касающегося данных прямых и расположенного внутри того же угла, где лежит данная точка, но не проходящего чрез эту точку. Последний круг легко построить. Затем найдем на нем точку, соответствующую данной, построим чрез найденную точку радиус построенного круга, а чрез данную точку построим прямую, параллельную этому радиусу, — точка пересечения ее с биссектором угла и должна быть центром искомого круга. Задача имеет 2 решения, так как у построенного сначала круга можно найти 2 точки, любую из которых можно принять за соответствующую данной.

263. Если возьмем три каких-либо круга O, O_1 и O_2 (чер. 256), то они попарно подобно расположены и к ним применимо свойство n°256. У этих трех кругов всего 6 центров подобия и они располагаются на четырех прямых: UST, US_1T_1, SU_1T_1 и TS_1U_1. Чрез каждый центр подобия проходят 2 из этих четырех прямых.

264. Степень точки относительно круга. В n° 222 мы познакомились с понятием о степени точки относительно круга. Этим именем называется, как мы знаем, произведение отрезков какой-либо прямой, проходящей чрез эту точку и пересекающей круг, от этой точки до точек пересечения прямой с кругом. Если точка вне круга, то это произведение равно квадрату касательной из нашей точки к кругу; если точка внутри круга, то это произведение равно квадрату половины хорды, делящейся в этой точке пополам. Чтобы отличить первый случай от второго, считают степень точки во втором случае отрицательною и перед указанным квадратом половины хорды ставят знак минус.



Чер. 257. Чер. 258.

Пусть имеем круг O (чер. 257) и точку M вне его. Построив касательную MA и прямые MO и OA, найдем из прямоугольного треугольника AOM, что степень точки $M = MA^2 = OM^2 - OA^2 = OM^2 - R^2$, где OA обозначаем чрез R.

Возьмем теперь точку M_1 внутри круга. Степень этой точки равна произведению отрезков хорды M_1B и M_1B', взятому со знаком минус. Если эта хорда перпендикулярна к прямой OM_1, соединяющей точку M_1 с центром, то хорда делится в точке M_1 пополам и $M_1B_1 = M_1B$ и, следовательно, степень точки $M_1 = -M_1B^2$. Из прямоугольного треугольника OM_1B найдем: $M_1B^2 = OB^2 - OM_1^2 = R^2 - OM_1^2$, а, следовательно, степень точки $M_1 = -M_1B^2 = -(R^2 - OM_1^2) = OM_1^2 - R^2$.

В обоих случаях степень точки выражается одинаково: она равна квадрату расстояния точки от центра минус квадрат радиуса.

Если точка лежит на круге, то легко увидим, что ее степень равна нулю.

265. Пусть теперь имеем 2 круга O и O_1 (чер. 258). Возникает вопрос, не существует ли таких точек, степени которых относительно

обоих кругов равны между собой. Если такие точки существуют, то где они расположены? Допустим, что M такая точка. Называя радиус OA чрез R и радиус O_1A_1 чрез r, имеем для этой точки M

$$OM^2 - R^2 = O_1M^2 - r^2,$$

или

$$OM^2 - O_1M^2 = R^2 - r^2 \quad (1)$$

Построим $MB \perp OO_1$. Тогда имеем:

1) из $\triangle$ OMB $\qquad OB^2 = OM^2 - MB^2$

2) из $\triangle$ O_1MB $\qquad O_1B^2 = O_1M^2 - MB^2$.

Вычитая по частям из первого равенства второе, имеем

$$OB^2 - O_1B^2 = OM^2 - O_1M^2.$$

На основании равенства (1) имеем:

$$OB^2 - O_1B^2 = R^2 - r^2,$$

или

$$(OB - O_1B)(OB + O_1B) = R^2 - r^2.$$

Называя $OO_1 = OB + O_1B$ чрез d (расстояние центров), получим:

$$OB - O_1B = \frac{R^2 - r^2}{d} \quad (2)$$

Из этого равенства и из равенства $OB + O_1B = d$ мы можем определить отрезки OB и O_1B, — получим для каждого одно решение (ур-ия первой степени), откуда заключаем, что точка B вполне определена. Отсюда выводим: если бы мы нашли другую точку M_1, степени которой относительно наших кругов равны, и из нее опустим перпендикуляр на линию центров, то он должен пройти чрез ту же точку B и, следовательно, слиться с MB. Следовательно, все точки, степени которых относительно двух кругов равны, расположены на перпендикуляре к линии центров. Этот перпендикуляр носит название — радикальная ось двух кругов. Обратно, легко показать, что всякая точка перпендикуляра MB имеет равные степени относительно наших кругов.

Из равенства (2) видим: 1) если $R = r$, то $OB - O_1B = 0$ и $OB = O_1B$, т.-е. радикальная ось двух равных кругов делит расстояние между их центрами пополам; 2) если $R > r$, то $OB > O_1B$, т.-е. радикальная ось расположена ближе к центру меньшего круга.

Но, если мы назовем чрез x и y расстояния точки B от круга O и от круга O_1 (мы применяемся к случаю данному на чертеже: круги расположены один вне другого), то $OB = R + x$, $O_1B = r + y$ и, подставив в равенство (2), найдем:

$$R + x - r - y = \frac{R^2 - r^2}{d}$$

откуда $\quad x - y = \frac{(R - r)(R + r)}{d} - (R - r) = \frac{R - r}{d}(R + r - d).$

У нас $R + r < d$ и $R - r > 0$ (ибо считаем, что $R > r$). Тогда из последнего равенства вытекает $x < y$, т.-е. радикальная ось ближе к большему кругу.

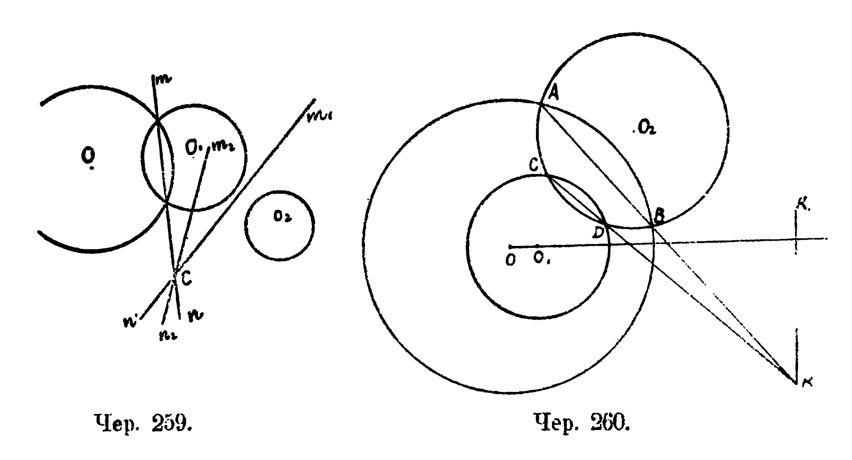
Далее видим, что если построить общую касательную CC_1 к нашим кругам, то для ее точки пересечения T с радикальною осью должны

иметь: $TC^2 = TC_1^2$, или $TC = TC_1$, т.-е. общая касательная двух кругов делится радикальною осью пополам.

Если два круга пересекаются, то радикальная ось должна пройти чрез точки пересечения, так как степень каждой из этих точек одинакова относительно каждого круга (она равна нулю); для построения радикальной оси в этом случае следует лишь построить прямую, определяемую этими точками пересечения.

Если два круга касаются, то радикальная ось есть перпендикуляр к линии центров чрез точку касания.

266. Пусть имеем 3 круга O, O_1 и O_2 (чер. 259). Построив радикальные оси mn и m_1n_1 двух пар кругов, мы найдем, что они пересекаются в какой-либо точке C, если только центры всех трех кругов не расположены на одной прямой.



Чер. 259. Чер. 260.

Так как точка C лежит на оси mn, то степени ее относительно кругов O и O_1 одинаковы; так как точка C лежит на оси m_1n_1, то степени ее относительно кругов O_1 и O_2 одинаковы. Отсюда следует, что точка C имеет одинаковые степени и относительно кругов O и O_2, т.-е. она должна лежать на радикальной оси последней пары кругов. Итак

Радикальные оси трех кругов, взятых попарно, пересекаются в одной точке, которая называется радикальным центром трех рассматриваемых кругов.

Если из радикального центра построить касательные ко всем трем кругам, то они равны между собою.

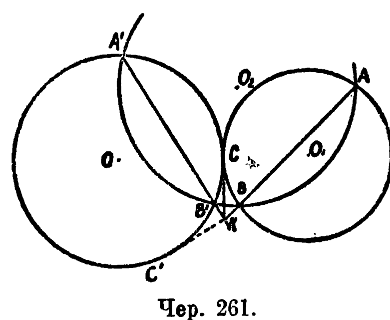
Если три круга попарно пересекаются, то их общие хорды проходят чрез одну точку (общая хорда двух пересекающихся кругов есть их радикальная ось).

267. Свойством предыдущего n° можно воспользоваться *для построения радикальной оси для двух непересекающихся кругов.* Пусть даны круги O и O_1 (чер. 260). Построим

третий круг O_2 чтобы его центр не лежал на линии центров OO_1 и чтобы он пересекался с каждым из данных кругов: с кругом O в точках A и B и с кругом O_1 в точках C и D. Тогда AB есть радикальная ось кругов O и O_2, CD — радикальная ось кругов O_1 и O_2, точка пересечения K прямых AB и CD есть радикальный центр наших трех кругов. Построив прямую $KK_1 \perp OO_1$, получим радикальную ось кругов O и O_1.

268. **Построить круг, касающийся данного круга и проходящий чрез две данных точки.**

Пусть дан круг O и точки A и B (чер. 261). Воспользуемся предыдущею задачею. Искомый круг должен касаться данного; следовательно, радикальною осью этой пары кругов должна служить их общая касательная. Если бы ее удалось построить, то легко было бы построить и искомый круг. Для построения этой радикальной оси воспользуемся, как в предыдущем n°, третьим кругом O_2, пересекающим и данный и искомый круг. Но у искомого круга мы знаем пока только 2 точки A и B; следовательно, и этот третий круг O_2 мы можем построить лишь так, чтобы он проходил чрез точки A и B. Итак, построим любой круг O_2, проходящий чрез точки A и B и пересекающий круг O, напр., в точках A′ и B′. Тогда прямая AB есть радикальная ось искомого круга и круга O_2, прямая A′B′ есть радикальная ось кругов O и O_2, а точка их пересечения K есть радикальный центр всех трех кругов. Теперь не трудно построить радикальную ось круга O и искомого, так как она должна касаться круга O: надо чрез точку K построить касательную к кругу O, а их можно построить две KC и KC′ (C и C′ точки касания). Тогда получим два решения: 1) искомый круг определяется точками A, B и C и 2) искомый круг определяется точками A, B и C′.



Чер. 261.

269. Мы имеем в виду решить еще две задачи на построение кругов: 1) построить круг, касающий двух данных кругов и проходящий чрез данную точку, и 2) построить круг, касающийся трех данных кругов (задача Аполлония). Для этого надо познакомиться еще с некоторыми свойствами центра подобия и радикальной оси двух кругов.

Чрез центр подобия S кругов O и O_1 (чер. 262) построена общая касательная SCC_1 к этим кругам и секущая SB, соответственные точки которой суть A и A_1, B и B_1.

Тогда $\frac{SA}{SA'} = \frac{R}{r}$ (где R радиус круга O и r радиус круга O_1)

и $$\frac{SB}{SB^1}=\frac{R}{r} \text{ откуда } \frac{SA}{SA^1}=\frac{SB}{SB^1};$$

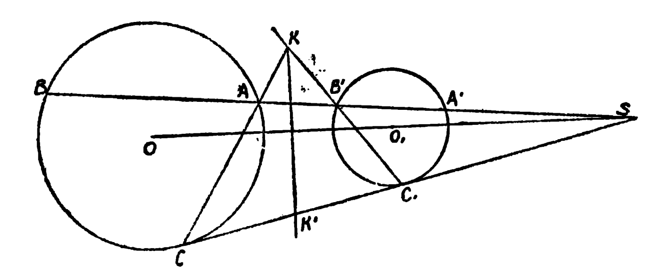
следовательно $$SA \,.\, SB^1 = SB \,.\, SA^1$$

Кроме того, имеем: $SA^1 \,.\, SB^1 = SC_1^2$ и $SA \,.\, SB = SC^2$. откуда $SA^1 \,.\, SB^1 \,.\, SA \,.\, SB = SC_1^2 \,.\, SC^2$.

Отсюда, пользуясь равенством (1), получим:

$$SA^1 \quad SB = SA \,.\, SB^1 = SC_1 \quad SC,$$

откуда вытекает, что 4 точки A^1, B C_1 и C лежат на одном круге O_2 и также 4 точки B^1, A, C_1 и C лежат на круге O_3 (на чертеже круги O_2 и O_3 не изображены). В таком случае радикальною осью кругов



Чер. 262.

O и O_2 служит их общая хорда AC и радикальною осью кругов O_1 и O_3 служит прямая B^1C_1. Эти две прямые AC и B_1C_1 должны пересекаться в радикальном центре кругов O, O_1 и O_2, т.-е. точка пересечения K прямых AC и B^1C_1 должна лежать на радикальной оси KK^1 кругов O и O_1.

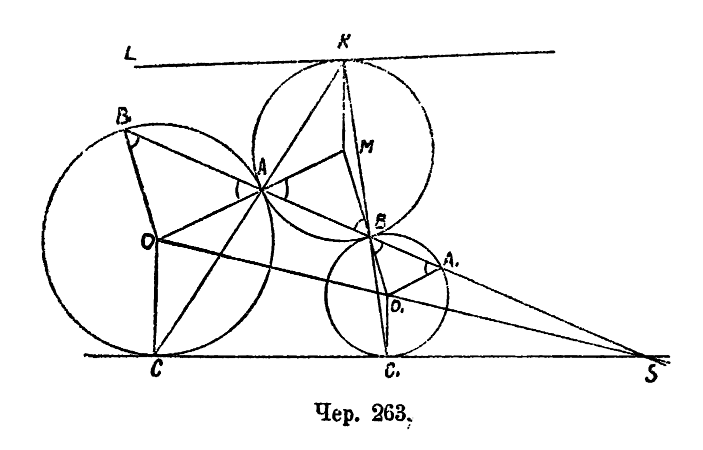
270. Пусть круг M касается кругов O и O_1 (чер. 263), обоих внешним образом в точках A и B. Построим прямую AB и пусть эта прямая пересекает еще круг O в точке B_1 и круг O_1 в A_1. Тогда OAM есть прямая, — следовательно, углы при основаниях в равнобедренных треугольниках OAB_1 и MAB равны; также O_1BM есть прямая и, следовательно, углы при основании в равнобедренном $\triangle O_1A_1B$ равны углам в $\triangle MAB$ (на чертеже равные углы отмечены). Отсюда заключаем, что $O_1A_1 \parallel OA$ и $O_1B \parallel OB_1$, откуда следует, что прямая B_1ABA_1 проходит чрез внешний центр подобия кругов O и O_1. Итак, *если круг касается двух других, то точки касания расположены на прямой, проходящей чрез центр подобия, но не суть соответственные точки.*

Мы разобрали случай, когда M с O и с O_1 имеет внешнее касание; тоже будет и для случая, когда M с O и с O_1 имеет внутреннее ка-

сание; но если M имеет с одним из кругов внешнее касание, а с другим внутреннее, то вместо внешнего центра подобия надо взять внутренний. Поэтому в предыдущем заключении мы и не указали, чрез какой именно центр подобия проходит прямая, соединяющая точки касания.

Если построить еще общую касательную SC_1C, то прямые CA и C_1B, как знаем, пересекаются в точке K, лежащей на радикальной оси кругов O и O_1. Но можно выяснить еще, что точка K лежит на круге M.

Точка A есть внутренний центр подобия кругов O и M, причем точке O соответствует точка M, радиусу OC (который ⊥ SC) соответствует некоторый радиус MX круга M, который параллелен OC, но имеет обратное с ним направление. Точка B есть внутренний центр подобия

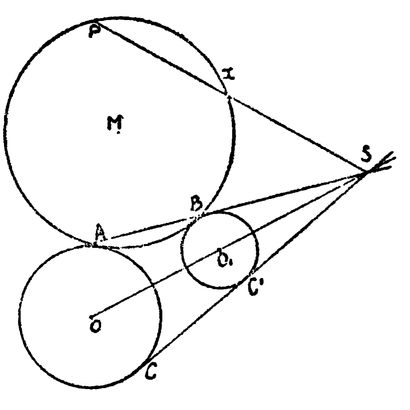


Чер. 263.

кругов O_1 и M, причем точке O_1 соответствует точка M и радиусу O_1C_1 круга O_1 соответствует некоторый радиус MY круга M, который параллелен радиусу O_1C_1, но имеет обратное с ним направление. Отсюда следует, что радиусы MX и MY параллельны друг другу (ибо $O_1C_1 \parallel OC$) и одинаково направлены, но они имеют общую точку M, — следовательно, они совпадают. С другой стороны, точка X должна лежать на прямой CA и точка Y на прямой C_1B. Поэтому совпадение радиусов MX и MY требует, чтобы точка X и точка Y совпали с точкою K, где пересекаются прямые CA и C_1B. Следовательно, точка K есть конец радиуса MK круга и M и K лежит на круге M.

Далее прямой SC относительно центра подобия A должна соответствовать прямая KL, проходящая чрез K (ибо SC проходит чрез C) и параллельная SC. Кроме того, прямая KL ⊥ MK, ибо SC ⊥ OC (радиусы OC и MK соответствуют друг другу). Поэтому прямая KL касается круга M в точке K. К тому же результату придем, рассматривая соответствие относительно центра подобия B.

271. Теперь мы можем приступить к решению первой из намеченных задач: даны круги O и O_1 и точка P (чер. 264). Требуется построить круг, касающийся кругов O и O_1 и проходящий чрез P.



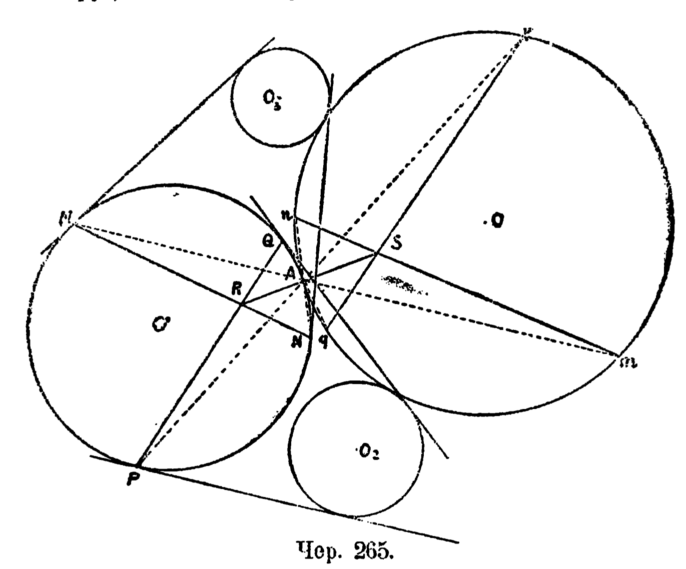
Чер. 264.

Пусть M искомый круг и точки A и B суть точки касания. Тогда легко найти точку X, где луч SP (S центр подобия кругов O и O_1) пересекает круг M. Мы имеем:

$SP \cdot SX = SA \cdot SB = SC \cdot SC_1$ (n° 269).

Отсюда $\frac{SX}{SC} = \frac{SC_1}{SP}$, т.-е. отрезок SX есть четвертый пропорциональный к трем известным отрезкам SC, SC_1 и SP, — построить его умеем. Тогда задача сведется к задаче n° 268.

272. Задача Аполлония. Даны три круга O_1, O_2 и O_3 (чер. 265). Построить круг, касающийся трех данных.



Чер. 265.

Мы будем рассуждать лишь в предположении, что мы ищем круг, касающийся каждого из данных внешним образом. Применить к другим случаям не представит затруднений (всего задача имеет 8 решений).

Пусть круг O есть искомый и A есть точка касания кругов O и O_1; тогда прямой MN, соединяющей точки касания M и N общих касательных для кругов O_1 и O_3, соответствует относительно центра подобия A (точка A есть внутренний центр подобия кругов O_1 и O) радикальная ось mn кругов O_1 и O_3: точке M соответствует точка m, лежащая на круге O и на радикальной оси кругов O_1 и O_3 (n° 270) и также точке N соответствует точка n, лежащая на радикальной оси кругов O_1 и O_3. Точно так же прямой PQ, соединяющей точки касания круга O_1 с общими касательными для кругов O_1 и O_2, соответствует радикальная ось pq кругов O_1 и O_2.

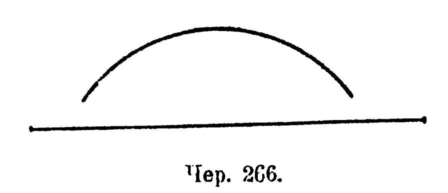
Точке R, где MN и PQ пересекаются, соответствует точка S, где mn и pq пересекаются, т.-е. радикальный центр кругов O_1, O_2 и O_3. Поэтому точки R и S лежат на одной прямой с A.

Точки R и S мы можем построить; соединив их, получим (между ними) точку касания искомого круга с кругом O_1, после чего задача легко решается.

ГЛАВА XXVII.

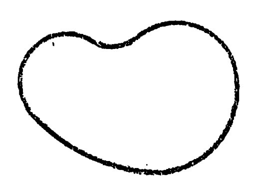
Измерения длины и площади круга.

273. Мы владеем представлением о длине кривой линии. Если мы имеем какую-либо кривую (чер. 266), то мы представляем, что эту кривую возможно выпрямить и получить прямолинейный отрезок. Этот отрезок и есть длина нашей кривой, — ее можно выразить числом, принимая другой какой-либо отрезок за единицу. Однако мы не можем построить прямолинейный отрезок, выражающий длину данной кривой. Тем не менее, не следует отказываться от решения задачи: выразить длину данной кривой числом, принимая за единицу определенный прямолинейный отрезок, — косвенным путем возможно притти к решению этой задачи. В курсе элементарной геометрии рассматривается лишь вопрос о длине окружности или ее дуги.



Чер. 266.

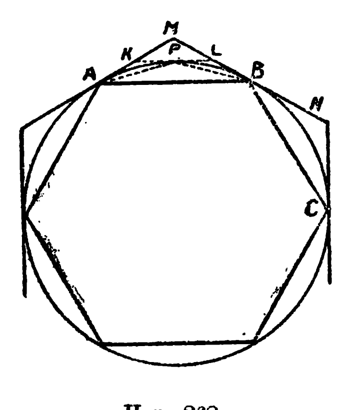
Подобно этому, часть плоскости может быть ограничена кривою линиею (или несколькими линиями). Мы видим, напр., на черт. 267, что имеющаяся там кривая выделяет из плоскости определенную площадь, но мы не можем построить равную ей площадь, ограниченную прямыми линиями. Однако, косвенным путем можно притти к решению задачи: выразить площадь, ограниченную кривою линиею, числом, принимая за единицу площадь определенного квадрата. В элементарной геометрии рассматривается вопрос о площади, ограничиваемой кругом, или о площадях, ограниченных дугою круга и прямыми линиями (или даже о площадях, ограниченных несколькими дугами одного или различных кругов и несколькими прямыми линиями).



Чер. 267.

274. Остановимся спачала на предварительных соображениях.

1. Пусть в круг (чер. 268) вписан правильный многоуг-к и около круга описан одноименный с ним прав. многоуг-к. Тогда мы видим, что $AB < AM + MB$; $BC < BN + NC$ и т. д. Отсюда (складывая эти неравенства по частям) приходим к заключению, что периметр вписан. многоуг-ка меньше периметра описанного.



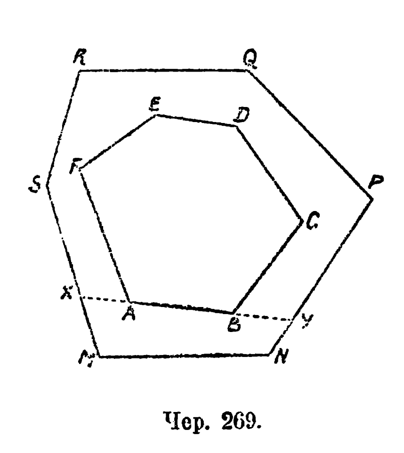
Чер. 268.

Возможно также показать, что периметры правил. вписанных многоуг-ков с увеличением числа сторон увеличиваются, а периметры прав. описан. многоуг-ков — уменьшаются. Напр., остановимся на случае, когда число сторон впис. и опис. правильных многоуг-ков удваивается. Для удвоения числа сторон наших прав. многоуг-ков следует разделить пополам каждую из дуг AB, BC и т. д. (чер. 268). Пусть, напр., P есть середина дуги AB. Соединив P с A и с B, получим две стороны AP и PB нового впис. многоуг-ка. Мы видим, что при удвоении числа сторон

каждая сторона (напр., AB) прежнего вписан. многоуг-ка заменяется ломаною ($AP + PB$), составленною из двух сторон нового многоуг-ка. Отсюда ясно, что периметр нового многоуг-ка больше периметра прежнего.

Построив затем в точке P касательную KL к кругу, мы получим сторону KL нового описанного многоу-ка. Чтобы перейти от периметра прежнего описанного многоуг-ка к периметру нового, мы должны сделать ряд замен, одною из которых является следующая: надо ломаную KML заменить прямолинейным отрезком KL. Отсюда заключаем, что периметр прав. описанного многоуг-ка при удвоении числа его сторон уменьшается.

2. Рассмотрим 2 каких-нибудь выпуклых многоуг-ка, причем все вершины одного лежат внутри другого. Пусть $ABCDEF$ и $MNPQRS$ (чер. 269) суть такие многоуг-ки. Тогда продолжим одну из сторон BA внутреннего многоуг-ка до пересечения в точках X и $У$ со сторонами внешнего. Мы видим, что точки A и B соединены двумя выпуклыми ломаными: объемлемой $AFEDCB$ и объемлющей $AXSRQPУB$. На основании свойств таких ломаных (n° 94) имеем:



Чер. 269.

$$BC + CD + DE + EF + FA < BУ + УP + PQ + QR + RS + SX + XA.$$

Рассматривая теперь точки X и $У$, мы также найдем:

$$XA + AB + BУ < XM + MN + NУ.$$

Складывая по частям эти неравенства, найдем

$$BC + CD + DE + EF + FA + XA + AB + BУ < BУ + УP + PQ + QR + RS + SX + XA + XM + MN + NУ.$$

Мы видим, что можно вычесть из обеих частей этого неравенства одинаковые отрезки XA и $BУ$. Можно также заменить $SX + XM$ через SM и $NУ + УP$ через NP. Поэтому получим

$$BC + CD + DE + EF + FA + AB < PQ + QR + RS + SM + MN + NP,$$

т.-е. **периметр внутреннего выпуклого многоуг-ка меньше периметра внешнего.**

Это свойство остается в силе, если внешний многоуг-к и не выпуклый.

Тоже свойство остается в силе, когда некоторые из вершин внутреннего многоугольника (или даже все) расположены на сторонах внешнего.

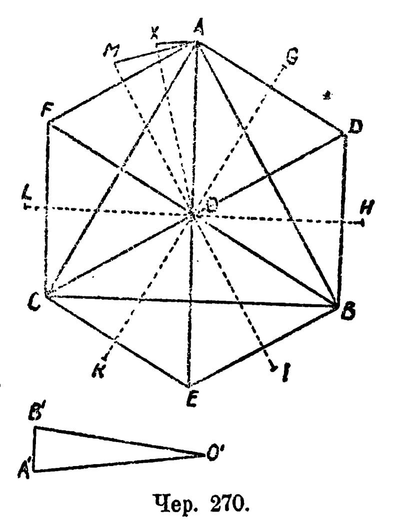
Можно сейчас же применить полученное свойство к периметрам вписанных в круг и описанных около него многоугольников:

Периметр всякого вписанного в круг многоугольника меньше периметра описанного около того же круга многоугольника.

В частном случае отсюда вытекает:

Периметр всякого вписанного в круг многоугольника меньше периметра описанного около того же круга квадрата, т.-е. **меньше** $8R$ (последнее потому, что сторона описанного квадрата равна диаметру круга или $2R$).

3. **Мы можем вписать в данный круг правильный многоуг-к такой, чтобы его сторона была меньше любого, наперед данного отрезка.**



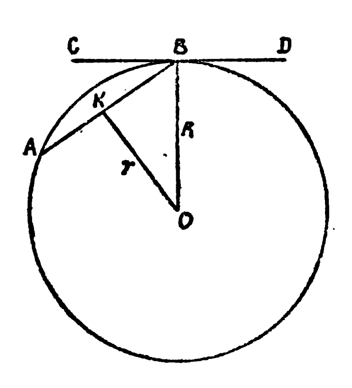
Чер. 270.

Пусть, напр., в круг, радиус которого $= OA = OB = OC$ (чер. 270, на чертеже самый круг не дан) вписан правильный треугольник ABC; затем, удвоив число сторон, получим прав. впис. 6-угольник $ADBECF$, затем 12-угольник $AGDHBIEKCLFM$ и т. д.

Обратим внимание на то, что при нашем процессе мы всякий раз строим центральный угол, опирающийся на сторону нового многоугольника, в 2 раза меньший, чем предыдущий таковой же

центральный угол, например, $\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOF$. Этим процессом деления угла пополам мы можем сделать центральный угол, опирающийся на сторону многоугольника как угодно малым. Пусть теперь нам дан отрезок $A'B'$; построим на нем равнобедренный $\triangle A'O'B'$ так, чтобы $O'A' = O'B' = OA$. Станем полученный $\angle A'O'B'$ откладывать на угле, например, AOF и пусть он уложится m раз с остатком.

Мы можем затем разделить угол AOF на 2^n частей, чтобы $2^n > m$ (выбрать такое число n всегда возможно); тогда одна такая часть, например, $\angle AOX$, должна быть меньше $\angle A'O'B'$. Два треугольника $A'O'B'$ и AOX имеют по две равных сторон $O'A' = O'B' = OA = OX$ (мы, конечно, разделяя последовательно пополам получаемые центральные углы, всякий раз откладываем на биссекторах отрезки равные радиусу и поэтому $OX = OA$), но углы между ними не равны, — тогда сторона AX, лежащая против меньшего угла, должна быть меньше стороны $A'B'$, т.-е. нам удалось процессом удваивания числа сторон дойти до такого многоугольника, каждая сторона которого меньше данного отрезка $A'B'$, как бы мал он ни был, другими словами, процессом удваивания можно получить такой правильный многоугольник, расстояние между двумя соседними вершинами которого меньше любого данного отрезка.



Чер. 271.

4. Пусть теперь вписан в круг прав. многоугольник об n сторонах и описан около круга одноименный с ним многоугольник; пусть AB и CD (чер. 271) суть их стороны. Построим апофемы OB и OK этих многоугольников и назовем OK через r (апофема вписан. многоугольника) и OB через R (апофема описан. многоугольника и в тоже время радиус нашего круга). Тогда из $\triangle OKB$ имеем $OB - OK < KB$ (разность двух сторон $\triangle$ — а меньше третьей его стороны). Так как $KB = \frac{AB}{2}$, то $R - r < \frac{AB}{2}$. Так

как мы можем, согласно предыдущему, вписать в круг такой правильный многоугольник, чтобы его сторона была меньше любого данного отрезка, как бы мал он ни был, то отсюда заключаем, что **можно вписать в круг такой правильный многоугольник, чтобы разность между радиусом круга и апофемою этого впис. прав. многоугольника оказалась меньше любого данного отрезка, как бы мал он ни был.**

5. Назовем периметр вписанного прав. n-угольника через p_n и периметр описан. прав. n-угольника через P_n.

Тогда, согласно n° 248, имеем

$$\frac{P_n}{p_n}=\frac{R}{r}$$

(отношение периметров прав. одноименных многоугольников равно отношению их апофем).

Отсюда мы можем (n° 177 добавление) получить следующую пропорцию

$$\frac{P_n-p_n}{P_n}=\frac{R-r}{R}.$$

Отсюда (n° 178) вытекает

$$\frac{P_n-p_n}{R-r}=\frac{P_n}{R}.$$

Ограничимся здесь рассмотрением лишь одного случая, а именно положим, что здесь речь идет лишь о правил. многоу-ках, получающихся при помощи процесса удваивания числа сторон, начиная с прав. вписанного и описанного четыреугольника. Тогда на основании пункта 1-го этого n° периметры следующих прав. описан. многоугольников будут каждый меньше $8R$ (периметра описанного квадрата). Поэтому и здесь мы будем считать $P_n<8R$. Если мы предыдущий член второго отношения последней пропорции заменим через $8R$, то это отношение увеличится и тогда будем иметь

$$\frac{P_n-p_n}{R-r}<\frac{8R}{R}.$$

Но отношение $\frac{8R}{R}$ равно числу 8. Поэтому

$$\frac{P_n - p_n}{R - r} < 8.$$

Это неравенство можно написать в иной форме:

$$P_n - p_n < 8(R - r).$$

Пусть нам дан какой-либо отрезок k. Тогда, согласно пункту 4 этого n°, мы достигнем того, чтобы $R - r$ было меньше $\frac{k}{8}$, если построим такой вписанный правильный многоугольник, чтобы его сторона была меньше $\frac{k}{4}$ (что возможно, согласно пункту 3). Тогда, построив такой вписанный и соотв. ему описанный многоугольники, мы получим:

$$P_n - p_n < 8.\frac{k}{8} \text{ или } P_n - p_n < k,$$

т.-е. можно вписать в круг и описать около него такие правильные одноименные многоугольники, чтобы разность их периметров была меньше любого данного отрезка, как бы мал он ни был.

275. Обратимся теперь к соображениям, которые позволят решить задачу о выражении числом длины круга в линейных единицах.

Пусть имеем круг O (чер. на стран. 284), радиус которого $= R$. Станем вписывать в этот круг и описывать около него различные многоугольники (в том числе и правильные). Мы можем периметры этих многоугольников выпрямить: отложив на прямой последовательно стороны одного из этих многоугольников, получим отрезок, равный сумме сторон многоугольника, т.-е. получим его периметр. Станем откладывать по прямой AD выпрямленные периметры наших многоугольников от точки A в определенном направлении.

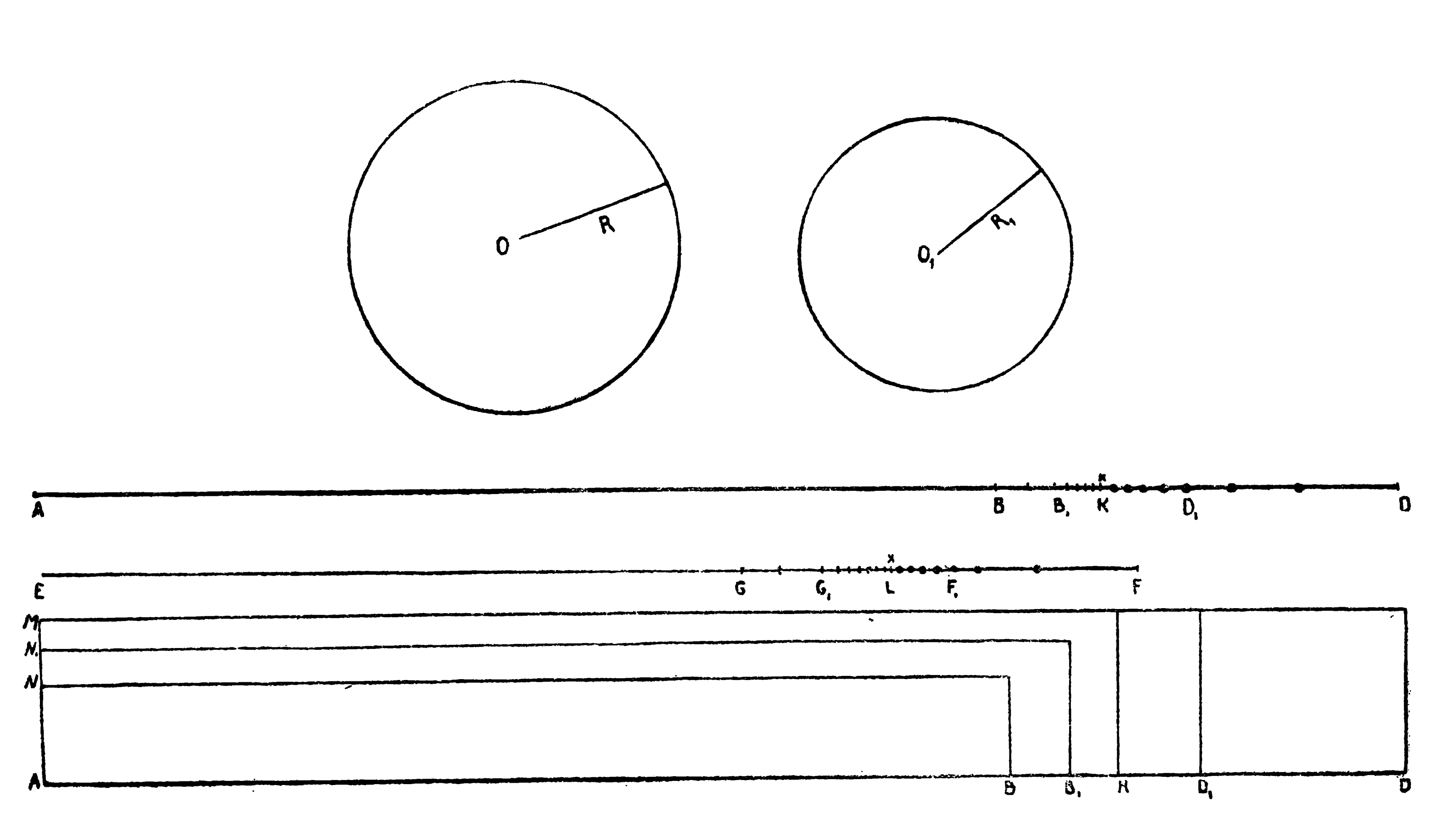
Концы этих периметров дадут на нашей прямой ряд точек, причем концы периметров вписанных многоугольников составят один класс точек, а концы периметров описанных — другой класс.

Точки первого класса (на чертеже названы 2 из них буквами B и B_1, а другие намечены черточками) не могут попасть в ту область, где расположены точки второго класса (на чертеже две из них названы буквами D и D_1, а несколько других намечены кружочками) и обратно: точки второго класса не могут попасть в область, занятую точками первого класса. Справедливость этого ясна из того, что мы знаем, что периметр всякого вписанного в круг многоугольника меньше периметра любого описанного около того же круга многоугольника.

Однако, увеличивая число сторон вписанного многоугольника, мы можем получать точки первого класса, постепенно приближающиеся к точкам второго класса, и, увеличивая число сторон описанного многоугольника, мы можем получать точки второго класса, постепенно приближающиеся к точкам первого класса (напр., если станем строить правильные многоугольники с постепенно удваивающимся числом сторон, то периметры вписанных многоугольников все увеличиваются, а периметры описанных все уменьшаются, — см. n° 274, пункт 1). Мы знаем еще (n° 274 пункт 5), что можно вписать в круг и описать около него два таких многоугольника, что разность между их периметрами может быть сделана меньше любого отрезка, сколь бы мал он ни был. Поэтому мы можем получить две таких точки, одну в первом классе, а другую во втором, что расстояние между ними меньше любого малого отрезка. Отсюда вытекает, что точки наших двух классов стремятся неопределенно сблизиться между собою.

Если мы обратимся к наглядному представлению расположения точек обоих классов на прямой AD, то мы должны признать, что существует граница, точка K, например, отделяющая область точек I класса от области точек II класса. Этой граничной точке K соответствует отрезок AK, который больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного многоугольника.

Если бы могли, начав с какого-либо прав. вписанного многоугольника, продолжать процесс удваивания числа сторон без конца, то мы могли бы признать отрезок AK за периметр прав. вписанного многоугольника с бесконечно большим числом сторон. Так же его можно было бы признать и за периметр прав. описанного многоугольника с бесконечно большим числом. Тогда


O
R
O1
R1
A
B
B1
K
D1
D
E
G
G1
L
F1
F
M
N1
N
A
B
B1
H
D1
D

пришлось бы признать, что и сам вписанный многоуголоник с бесконечно большим числом сторон совпадает с описанным таким же многоугольником. Но окружность всегда располагается между вписанным и описанным многоугольниками, — пришлось бы признать, что прав. впис. или описанный многоугольник с бесконечно большим числом сторон совпадает с окружностью, и тогда отрезок AK представлял бы собою выпрямленный периметр круга или, что тоже самое, длину круга.

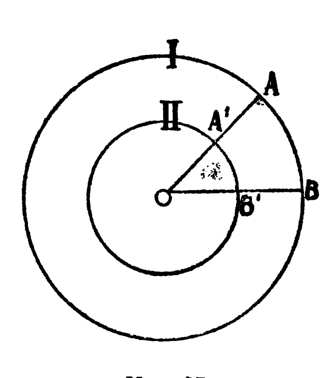
Итак, мы пришли к необходимости, если желаем решать задачу о выпрямлении круга, рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно-большим числом сторон.

276. Воззрение на круг, как на правильный многоугольник с бесконечно-большим числом сторон, может быть выяснено и иным путем:

Чем больше сторон у правил. многоугольника, тем больше и вершин, причем все его вершины находятся на одинаковом расстоянии от центра. У правильного многоуг-ка с бесконечно большим числом сторон бесконечно много и вершин и все они расположены на одинаковом расстоянии от центра. Мы можем построить совокупность всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от центра; эта совокупность представляет собою круг. Поэтому мы можем, если это соответствует определенной цели, признать круг за правильный многоугольник с бесконечно большим числом вершин (каждая точка круга может быть рассматриваема, как одна из вершин этого правильного многоугольника) или с беск. большим числом сторон.

277. Признав возможным рассматривать круг, как правильный многоуг-к с бесконечно-большим числом сторон, мы этим самым признаем, что на круг можно распространить некоторые свойства правильных многоугольников, а именно те, какие имеют место при любом числе сторон. Мы знаем (n° **248**), что отношение периметров двух правильных одноименных многоугольников равно отношению их радиусов. Это свойство может быть распространено и на два круга: мы можем признать, что два круга можно рассматривать, как правильные многоугольники, хотя и с бесконечно-большим, но с одинаковым числом сторон (напр., мы можем вписать в наши два круга правильные шестиугольники, потом

12-угольники, потом 24-угольники и т. д. без конца, — всякий раз будем получать правильные многоугольники с одинаковым числом сторон); к тому же придем и из следующих соображений: расположим наши два круга I и II так, чтобы они имели общий центр O (чер. 272); тогда каждую точку (напр., A) большого круга следует считать за вершину соответствующего правильного многоугольника с бесконечно большим числом сторон, а ей соответствует единственная точка A' малого круга, лежащая на радиусе OA, и обратно, каждой точке B' малого круга соответствует единственная точка B большого, лежащая на продолженном радиусе OB', т.-е. каждой вершине I правильного многоугольника с бесконечно-большим числом сторон — круг I мы рассматриваем, как правильный многоугольник с бесконечно-большим числом сторон — соответствует единственная вершина II прав. многоугольника с бесконечно-большим числом сторон — круг II мы признаем за прав. многоугольник с бесконечно-большим числом сторон — и обратно, каждой вершине II прав. многоугольника соответствует единственная вершина I прав. многоугольника; эти соображения позволяют считать число вершин, а след. и сторон, у обоих прав. многоугольников одинаковым.



Чер. 272.

В n° 273 мы признали, что владеем представлением о длине кривой вообще и о длине круга в частности. Назовем радиусы двух кругов через R и R_1, а отрезки, которые мы признаем длиною каждого из этих кругов, через C и C_1. Тогда мы можем смотреть на отрезки C и C_1, как на выпрямленные периметры правильных одноименных многоугольников с бесконечно-большим числом сторон (можно было бы назвать эти отрезки периметрами наших кругов, но так называть не принято). Поэтому мы можем к отрезкам C и C_1 применить вышеуказанное свойство одноименных прав. многоуг-ков, т.-е. мы имеем:

$$\frac{C}{C_1}=\frac{R}{R_1}.$$

Но ясно, что $\frac{R}{R_1}=\frac{2R}{2R_1}$; поэтому

$$\frac{C}{C_1}=\frac{2R}{2R_1},$$

т.-е. отношение длин двух кругов равно отношению диаметров этих кругов.

Применим сюда возможность переставлять средние члены пропорции (n° **178**); получим

$$\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2R_1},$$

т.-е. отношение длины круга к его диаметру равно постоянному числу (отношение длины одного круга к своему диаметру равно отношению длины другого круга к своему диаметру и, следов., равно отношению длины третьего круга к своему диаметру и т. д.). Это постоянное число можно, как скоро увидим, вычислить с какою-либо точностью, но безошибочно выразить его никакими долями единицы нельзя; его принято обозначать греческою буквою π (пи). Тогда имеем:

$$\frac{C}{2R}=\pi,$$

откуда

$$C=2\pi R.$$

Эта формула позволяет вычислять длину окружности с какою-либо степенью точности: π, как сказано, мы вычислим с известною степенью точности, R мы можем измерять непосредственно.

Вот еще другие соображения, при помощи которых можно притти к пропорции $\frac{C}{C_1}=\frac{R}{R_1}$ (а отсюда получить, что $\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2R_1}$). Обратимся к чертежу стран. 284. Пусть имеем два круга, радиусы которых R и R_1. Станем вписывать в эти круги подобные многоугольники, а также станем около них описывать подобные многоугольники (среди них правильные единоименные); станем затем, как уже это делали, на прямой AD от точки A откладывать

выпрямленные периметры многоугольников, вписанных в первый круг и описанных около него, и на прямой EF от точки E — периметры многоугольников вписанных во второй круг и описанных около него. Получим, как уже это было выяснено, на прямой AD два класса точек: 1) точки B B_1..., служащие концами периметров многоугольников, вписанных в первый круг и 2) точки D, D_1..., служащие концами периметров многоугольников, описанных около первого круга; границею между этими классами точек служит точка K; тогда мы признали, что AK есть длина первого круга. Также на прямой EF получим два класса точек: 1) точки G, G_1..., служащие концами периметров многоугольников, вписанных во второй круг, и 2) точки F, F_1..., служащие концами периметров многоугольников, описанных около второго круга; границею между этими двумя классами точек пусть служит точка L, тогда отрезок EL представляет длину второго круга. Пусть AB и EG суть периметры двух подобных многоугольников (напр., двух правильных одноименных), вписанных в наши два круга; пусть таковыми же еще являются отрезки AB_1 и EG_1 и т. д., — таких пар отрезков можно получить сколько угодно много.

Пусть также пары отрезков (AD и EF), (AD_1 и EF_1) и т. д. представляют периметры подобных многоугольников (напр., правильных одноименных), описанных около наших кругов.

Тогда мы имеем:

$$\frac{AB}{EG}=\frac{R}{R_1},\quad \frac{AB_1}{EG_1}=\frac{R}{R_1}\ldots,\quad \frac{AD}{EF}=\frac{R}{R_1},\quad \frac{AD_1}{EF_1}=\frac{R}{R_1}\ldots$$

Мы можем получить сколь угодно много таких пропорций для точек на прямых AD и EF, принадлежащих или к первым классам или ко вторым классам. Если бы мы, увеличивая число сторон вписанных или описанных многоугольников, достигли бы точек K (для первого круга) и L (для второго круга), т.-е., если бы получили периметры прав. многоугольников с бесконечно большим числом сторон, радиусы которых суть R и R_1, то и для отрезков AK и EL должны были бы признать справедливость пропорции

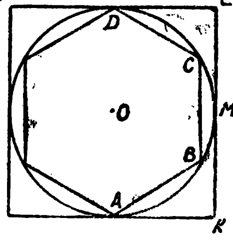
$$\frac{AK}{EL}=\frac{R}{R_1},$$

или, называя AK через C (длина первого круга) и EL через C_1 (длина второго круга):

$$\frac{C}{C_1} = \frac{R}{R_1}.$$

278. В пп° 240—247 мы нашли два простейших правильных многоугольника, один — вписанный в круг и другой — описанный около него, стороны которых выражаются рационально чрез радиус круга. Это вписанный правильный шестиугольник: $a_6 = R$ и описанный правильный четыреугольник: $b_4 = 2R$. Построим их для круга O (чер. 273). Тогда периметр вписанного шестиугольника меньше длины круга и периметр описанного 4-угольника больше длины круга [1]), но периметр первого $= 6R$, а периметр второго $= 8R$. Следовательно, имеем:

$$C > 6R \text{ и } C < 8R.$$



Чер. 273.

Заменяя C чрез $2\pi R$, получим:

$$2\pi R > 6R \text{ и } 2\pi R < 8R,$$

откуда, после сокращений:

$$\pi > 3 \text{ и } \pi < 4,$$

т.-е. число π заключается между целыми числами 3 и 4. Таким образом мы вычислили число π с точностью до единицы.

Отсюда видим, как можно было бы вычислить это число с бо́льшею точностью: надо рассмотреть периметры вписанных и описанных правильных многоугольников с большим числом сторон, причем для удобства вычисления берут обыкновенно вписанный и описанный многоугольники одноименные. Например, сначала вписанные и описанные 6-угольники, потом 12-угольники, 24-угольники и т. д., все удваивая число сторон. Например, периметр вписанного 48-угольника $= 6{,}279\ldots R$, а описанного 48-угольника $= 6{,}292\ldots R$.

---

[1]) Справедливость этого ясна: мы рассматриваем круг, как прав. многоуг-к с бесконечно-большим числом сторон, что позволяет применить сюда п° 274, пункт 2.

То же заключение вытекает из рассмотрения чер. на стран. 284, где длина круга есть отрезок AK.

Отсюда $2\pi R > 6,279\ldots R$ и $2\pi R < 6,292\ldots R$,

или $\pi > 3,139\ldots$ и $\pi < 3,146\ldots$

Видим, что у этих двух чисел целые единицы и десятые доли одинаковы, а разница лишь в сотых и т. д. долях.

Очевидно: $3,146 - 3,139 < 0,1$. Поэтому, взяв $\pi = 3,1\ldots$ мы говорим, что целые единицы и десятые доли у нас вычислены верно, сотых и т. д. не знаем и ошибка во всяком случае меньше 0,1.

Существуют и другие способы, более удобные для вычисления π.

Впервые число π было вычислено (с ошибкою, меньшею чем 0,002, Архимедом. Он дал для него: $\pi =$ (прибл.) $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

Затем в XVI столетии Адриан Меций дал более точное число для π:

$$\pi = (\text{прибл.})\ \frac{355}{113}.$$

(Это число удобно запомнить: написать 3 нечетных первых числа, повторяя каждое два раза 113355 и разделить по середине на 2 группы 113 | 355, — вторая группа есть числитель, а первая знаменатель выше данного числа).

Теперь исключительно выражают π десятичною дробью. Вот значение π ограниченное десятью десятичными знаками:

$$\pi = 3,1415926535\ldots$$

В задачах приходится брать чаще всего $\pi = 3,14$ или $\pi = 3,14159$ или одно из выше данных чисел $\left(\frac{22}{7} \text{ и } \frac{355}{113}\right)$.

Полезно также знать число, обратное π:

$$\frac{1}{\pi} = 0,31831\ldots$$

279. Мы можем вычислять длину круга с какою угодно точностью. Например, пусть радиус круга $= 68$ лин. един. и желаем

вычислить длину круга с точностью до 0,01 лин. един. Для этого надо число π взять с 4 десятичными знаками, т.-е. $\pi = 3{,}1416$; последнюю цифру пишем 6, а не 5, так как следующая цифра (первая из отбрасываемых есть 9). Легко сообразить, что мы делаем для π ошибку меньшую, чем $\frac{1}{100000}$. Для вычисления длины круга надо это значение π умножить на $2R$, т.-е. на 136; от этого и ошибка увеличится в 136 раз и окажется меньше $\frac{136}{100000}$ или $< \frac{1}{500}$. Полученный результат окажется точнее, чем нам требовалось.

280. Мы можем также вычислить длину дуги, содержащей известное число градусов.

Пусть в дуге n°. Назовем ее длину чрез S. Узнаем сначала длину дуги в 1°: длина всего круга $= 2\pi R$, а во всем круге 360°. следовательно,

$$\text{дл.} \smile 1^\circ = \frac{2\pi R}{360},$$

но в нашей дуге n°, следовательно.

$$S = \frac{2\pi Rn}{360} = \frac{\pi Rn}{180}.$$

Подобным же образом следует поступать, если дуга выражена не только в градусах, но и в минутах и секундах.

Задача. Сколько градусов в дуге, длина которой равна ее радиусу?

Называя искомое число градусов чрез x и заменяя в предыдущей формуле n чрез x, а S, согласно условию, чрез R, получим ур-ние:

$$R = \frac{\pi Rx}{180},$$

откуда

$$x = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 180^\circ . \frac{1}{\pi} = 180^\circ . 0{,}3183 \ldots = 57^\circ\ 17'\ 45''\ \text{(приблиз.)}.$$

Найденная дуга принимается в высшей математике за единицу при измерении дуг, и она называется **радианом**.

281. В n° 203 мы узнали, как измерять площадь правильного многоугольника: надо измерить его периметр и апофему и взять половину произведения полученных от их измерения чисел. Применяя это к кругу (круг рассматриваем, как правильный многоугольник с бесконечно-большим числом сторон) и называя площадь, ограниченную кругом чрез K, получим:

$$K = \frac{C \cdot p}{2},$$

где C (периметр круга) $= 2\pi R$, а p — его апофема, она должна считаться равною радиусу круга. Поэтому имеем:

$$K = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

Возможно притти к тому же результату с иной точки зрения. Обратимся к чертежу на стран. 284. Здесь отрезки AB, AB_1... AD, AD_1... служат периметрами каких-либо вписанных и описанных многоугольников. Мы можем для каждого из этих многоугольников построить равновеликий ему прямоугольник с определенным основанием. Остановимся лишь на правильных многоугольниках; для каждого из них можно построить равновеликий ему прямоугольник (n° **203**), основанием которого служит периметр этого прав. многоугольника, и высотою половина его апофемы (а для описанного около круга прав. многоугольника высота равна половине радиуса этого круга). На стран. 284 построены такие прямоугольники: AB, AB_1... суть периметры прав. вписанных многоугольников, AN, AN_1... — половины апофем этих многоугольников [1]), AD, AD_1,... — периметры прав. описанных многоугольников, AM — половина радиуса круга (AM есть общая высота прямоугольников, равновеликих прав. описанным многоугольникам).

---

[1]) На чертеже половины апофем AN, AN$_1$... $\frac{1}{2}$ радиуса (AM) даны в увеличенном виде.

Так как периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного и апофема вписанного прав. многоугольника меньше радиуса круга, то прямоугольники, равновеликие вписанным многоугольникам, заключены внутри любого из прямоугольников, равновеликих описанным многоугольникам. Так как концы периметров вписанных многоугольников (точки B, B_1,...) приближаются как угодно близко к точкам D, $D_1, \ldots$, служащих концами выпрямленных описанных многоугольников (n° **274**, пункт 5), так как, кроме того, апофемы правильных вписанных многоугольников могут быть сделаны (увеличением числа сторон многоугольника) сколь угодно близкими к радиусу круга (n° **274** пункт 4), то площади наших прямоугольников ABN, AB_1N_1,... стремятся, с увеличением числа сторон у многоугольников, неопределенно сблизиться с площадями прямоугольников ADM. AD_1M,... Границею между этими двумя классами прямоугольников является прямоугольник AKM, основание которого отрезок AK представляет длину нашего круга. Площадь этого прямоугольника мы уже должны признать равной площади круга, так как площадь прямоугольника AKM больше площади любого из прямоугольников первого класса (ABN, AB_1N_1...) и меньше площади любого из прямоугольников второго класса (ADM, AD_1M,...). а таким же свойством, как мы непосредственно видим, обладает площадь круга: она больше площади любого вписанного в этот круг многоугольника и меньше площади любого описанного около этого круга многоугольника. Называя через C число, выражающее длину нашего круга (т.-е. отрезок AK) в каких-либо линейных единицах, и через R — число, выражающее радиус круга в тех же линейных единицах, мы найдем, что площадь прямоугольника AMK или площадь круга $= C \cdot \frac{R}{2}$ (ибо $AM = \frac{1}{2} R$), или

$$K = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

282. Построим для круга O (чер. 274) два радиуса OA и OB. Фигура, состоящая из этих двух радиусов и дуги AB, заключенной между ними, называется круговым сектором (иногда просто называют сектор). Мы можем вычислить площадь, ограниченную сектором, если знаем, сколько градусов в его угле AOB. Положим, что $\angle AOB = n°$. Тогда имеем: площадь круга $=$

$=\pi R^2$, площадь сектора в $1^\circ = \frac{\pi R^2}{360}$, потому что можно построить 360 секторов, площади которых равны между собою и вместе составляют площадь круга, — угол такого сектора $=1^\circ$, а площадь сектора в $n^\circ = \frac{\pi R^2 . n}{360}$. Называя эту площадь чрез Q имеем:

$$Q = \frac{\pi R^2 . n}{360}.$$

Можно эту формулу переделать:

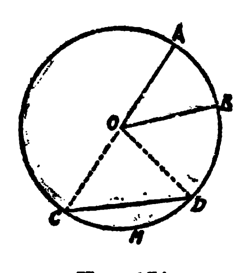
$$Q = \frac{\pi R n}{180} . \frac{R}{2} = \frac{sR}{2},$$

где чрез s обозначена длина $\smile AB$ (в n° 280 мы получили, что $s = \frac{\pi R n}{180}$).

Полученную формулу выражают словами: площадь сектора равна половине произведения длины его дуги на радиус.

В задачах чаще приходится пользоваться первою формулою.

Если построим хорду CD (чер. 274) и рассмотрим фигуру, состоящую из хорды CD и $\smile CD$, то она называется круговым сегментом (иногда называют просто сегмент). Чтобы измерить площадь, ограниченную сегментом CDM, надо измерить площадь сектора COD и площадь треугольника COD, затем из первой вычесть вторую.



Чер. 274.

283. Упражнения. 1. Каков должен быть радиус круга, чтобы его длина равнялась 10 дм.?

2. На радиусе OA круга построим, как на диаметре, другой круг. Затем построим еще радиус первого круга, пересекающий второй круг в точке B и первый в точке C. Тогда длина дуги AB равна длине дуги AC.

3. Сумма стороны правильного треугольника и стороны квадрата вписанных в круг равна приблизительно (с точностью до 0,01) половине длины этого круга.

4. Длина дуги в 20° равна $1\frac{1}{9}\pi$ дм. Найти длину дуги в 36° другого круга, радиус которого на 2 дм. больше радиуса первого

Отв. $2{,}4\pi$ дм.

5. На сколько надо увеличить радіус круга, чтобы длина его дуги в 24° увеличилась на $\frac{\pi}{2}$ дм. Отв. На $3\frac{3}{4}$ дм.

6. Радиус круга $= 6$ лин. един. Вычислить площадь сегмента, дуга которого содержит 120°.

Отв. $(12\pi - 9\sqrt{3})$ кв. един.

Вычислить площадь правильного четыреугольника, вписанного в круг, если площадь сектора этого круга с углом 20° равна 8π кв. един.

8. Построены три концентрических круга: радиус второго равен стороне правильного четыреугольника, вписанного в первый, а радиус третьего равен стороне правильного треугольника, вписанного во второй. Найти отношение площадей двух колец между этими кругами. Отв. $\frac{1}{4}$.

9. Найти площадь кольца, ограниченного двумя концентрическими кругами, если длина дуги в 20° первого круга $= 2\pi$ лин. един. и длина дуги в 18° второго круга $=$ также 2π лин. един.

Отв. 76π кв. един.

10. Из точки круга, радиус которого $= R$, построены две хорды: одна из них равна радиусу, а другая — стороне квадрата, вписанного в этот круг, и обе они расположены по одну сторону центра. Вычислить площадь, ограниченную двумя построенными хордами и дугою между ними.

Отв. $\frac{R^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6)$.

11. Построен равносторонний треугольник и на его стороне, как на диаметре, построен круг. Вычислить ту часть площади треугольника, которая лежит вне круга, если сторона треугольника $= a$. Отв. $\frac{a^2}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$.

12. Построен квадрат, сторона которого $= a$. Затем построен круг, центр которого расположен в середине одной стороны квадрата и который проходит чрез середины двух других его сторон. Вычислить ту часть площади квадрата, которая расположена вне круга. $\frac{a^2}{16}(12 - \pi)$

13. Основание равнобедренного треугольника $= 2a$, а его боковая сторона $= b$. Вычислить площадь круга, вписанного в этот треугольник. Отв. $\frac{\pi a^2(b - a)}{b + a}$.

14. Сколько градусов, минут и секунд в угле сектора, равновеликого квадрату, стороною которого служит выпрямленная дуга этого сектора?

ОГЛАВЛЕНИЕ.